Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

MACCHINE MATEMATICHE E CECITA'.
Strumenti, proposte e percorsi didattici per la scuola secondaria.

Tesi di Laurea in Didattica della matematica

Relatore:
Prof.
Alessia Cattabriga

Presentata da:
Ludovica Di Nicolantonio

I Sessione
Anno Accademico 2020/2021

Indice

Introduzione

Il lavoro di ricerca affrontato durante quest'ultimo anno e contenuto in questa tesi è incentrato sull'utilizzo delle macchine matematiche da parte di studenti non vedenti. Più precisamente, l'obiettivo principale di tale studio è quello di analizzare la valenza delle macchine geometriche come mezzi semiotici di oggettivazione, per cercare di superare gli ostacoli derivanti dal deficit visivo e raggiungere un apprendimento stabile e significativo, dunque prendere coscienza.
Ciò che mi ha spinto ad indagare sul rapporto tra matematica e cecità è riferibile alla mia esperienza personale. Nel 2017 ho svolto l'attività di tutorato alla pari presso l'Università di Bologna, per il Servizio per gli Studenti con Disabilità e con DSA, in cui ho supportato nella preparazione degli esami e nell'organizzazione dei materiali didattici accessibili diversi studenti con disabilità e disturbi specifici per l'apprendimento. Mi sono occupata prevalentemente di fornire un sostegno allo studio di materie scientifiche, quali algebra lineare, analisi e matematica generale (per i corsi di studio di tutto l'Ateneo).
Dopo aver assistito una studentessa non vedente della facoltà di Economia per tutto il corso di Matematica generale, ho avuto l'occasione di visitare diverse volte l'Istituto per ciechi "Cavazza" di Bologna, un affidabile punto di riferimento informativo ed orientativo per tutti coloro che si occupano di disabilità visiva. A settembre 2018, conclusa la mia esperienza in Ateneo come tutor dell'area scientifica, ho deciso di incentrare la mia ricerca sulla disabilità specifica della cecità: l'idea di un mondo che non si può vedere, ma

soltanto toccare, udire, odorare e gustare è alquanto complessa da concepire per una persona che, come me, si è sempre basata sul senso della vista. Il tema dell'apprendimento per un ragazzo cieco diventa quindi molto stimolante e complesso da sviluppare, come pure gli aspetti che riguardano il ruolo del docente e il percorso didattico rivolto a studenti con tale disabilità.
La matematica, così come viene insegnata oggi, sembra una materia estremamente legata alla vista: l'uso della lavagna appare indispensabile, come anche il ricorso a immagini, grafici e tabelle. Il tutorato alla pari mi ha fatto notare che, proprio per questo motivo, molti ragazzi ciechi sono scoraggiati nello studio di materie scientifiche, in particolare della geometria. Da qui l'idea di una tesi sul rapporto tra matematica e cecità.
Ho scelto questa tematica per il desiderio di essere preparata nell'eventualità di trovarmi un giorno in una condizione del genere: desidero disporre delle conoscenze e degli strumenti base che consentano di affrontare la situazione nel modo più efficace possibile, favorendo un apprendimento adeguato all'allievo non vedente.
In secondo luogo spero che questo lavoro sia uno strumento utile per futuri colleghi che si troveranno a confrontare con tale casistica.
Il lavoro è limitato ai soggetti con disabilità visiva totale, siano essi congeniti o acquisiti, e non prende in esame le varie forme di ipovisione. Negli studenti ciechi totali, pur restando l'individualità delle difficoltà incontrate nell'approccio alla matematica (non in quanto disabili, ma in quanto alunni), le soluzioni da adottare possono essere generalizzate: la cecità, a differenza dell'ipovisione, pone coloro che ne sono affetti al medesimo livello, poiché essi non possono avvalersi in alcun modo della vista. Resta ovviamente la specificità dei casi per quanto riguarda l'uso degli altri sensi e il bagaglio di esperienze personali dei soggetti, dovuti all'ambiente culturale e sociale in cui sono cresciuti. Tutto questo deve essere sempre tenuto in considerazione nel momento in cui ci si rapporta con l'alunno e si decidono le strategie didattiche da utilizzare, in modo che risultino le più adatte e funzionali per lo stesso.

L'analisi presentata in questa tesi sarà limitata anche nel considerare la cecità come unica forma di disabilità: la mancanza della vista, infatti, non pregiudica in alcun modo le capacità intellettive del soggetto. Anche il non vedente, correttamente stimolato e con gli strumenti adeguati, può raggiungere gli stessi obiettivi dei suoi compagni, seguendo i suoi desideri e le sue naturali inclinazioni.
Da questa sfida è nata un'attività didattica sperimentale condotta in collaborazione con un'altra studentessa dell'Università di Bologna, Alessia Raggi, la cui tesi [24] è da considerarsi complementare alla presente trattazione: in particolare, entrambi gli elaborati riguardano la progettazione di un laboratorio che prevede l'utilizzo di macchine matematiche, ma mentre la mia tesi si focalizzerà sul ruolo dell'esperienza tattile nell'apprendimento della geometria per i non vedenti, l'elaborato di Alessia si concentrerà sulla valenza didattica dell'uso di questi strumenti per l'introduzione delle coniche.

La trattazione si articola in quattro capitoli.
Il primo capitolo descrive alcune tematiche relative alla disabilità visiva in relazione all'apprendimento della matematica, come lo sviluppo linguistico e motorio e l'educazione scolastica nell'ambito matematico. Si passa, poi, alla presentazione della teoria di oggettivazione di Radford, concretizzare dal punto di vista didattico la teoria degli oggetti e significati matematici di Vygotskj, e negli ultimi paragrafi si espongono i sussidi tiflodidattici come mezzi semiotici di oggettivazione. Si conclude parlando delle macchine matematiche in quanto strumenti in grado di oggettivare elementi geometrici specifici.
Nel Capitolo 2 si presenta un percorso didattico ispirato al curriculo di un secondo biennio di un Liceo Artistico. Inizialmente si era pensato di svolgere un laboratorio con le macchine matematiche per trasformazione in una classe terza di un Liceo Linguistico di Bologna, tuttavia a causa dell'emergenza Covid-19 e della successiva chiusura degli edifici scolastici, si è riprogrammata l' intera attività basandola su un percorso più generale: attraverso la manipolazione delle macchine matematiche si studiano non solo le principali

trasformazioni piane, ma si offre anche un supporto ad un primo approccio alla prospettiva.
Mentre in questa sezione vengono illustrati i pantografi, un approfondimento sui curvigrafi si può trovare in [24]. Successivamente si presenta un possibile percorso da attuare in classe con l'uso del pantografo per lo stiramento: si fornisce, in questo modo, un primo esempio di utilizzo di una macchina matematica in classe, sia da parte di alunni normodotati, sia di non vedenti (con relativo adattamento dell'attività attraverso opportuni sussidi precedentemente esposti). Questa esperienza offre un ottimo spunto per poter parlare di ombre solari, illusioni ottiche e primi elementi di prospettiva, sempre in chiave di didattica speciale per disabili visivi.
Il terzo capitolo descrive il percorso svolto con i curvigrafi in una terza liceo linguistico di Bologna, in cui è presente una studentessa cieca. Dopo una breve presentazione della ragazza, si passa alla descrizione dettagliata delle schede guida preparate (e opportunamente adattate alle esigenze della studentessa non vedente) per l'esplorazione dell'ellissografo a filo e del parabolografo di Cavalieri.
Nel Capitolo 4 si trova l'analisi dei file prodotti dall'alunna durante le attività in classe, alla luce della lente teorica approfondita nel primo capitolo, e si traggono le conclusioni in merito al laboratorio svolto, evidenziandone sia gli aspetti positivi che le criticità emerse.
L'Appendice A riporta le schede illustrative dei pantografi descritti nel Capitolo 2 e presenti in giacenza presso il Liceo Augusto Righi di Bologna, ciascuna delle quali è correlata da una fotografia, un'immagine della macchina e una breve descrizione della struttura e del funzionamento.
L'Appendice B offre un ripasso su definizioni ed osservazioni a supporto della trattazione del Capitolo 2.

Capitolo 1

Il quadro teorico

Il seguente capitolo approfondisce le tematiche relative alla disabilità visiva in un'ottica di tipo educativo, considerando le tendenze di sviluppo dei ragazzi non vedenti collegate all'apprendimento della matematica.
Nelle prime sezioni si seguono gli sviluppi linguistico e motorio dei bambini e ragazzi non vedenti, per poi passare, successivamente, alla loro educazione scolastica, con particolare riferimento alla didattica della matematica e al ruolo dell'insegnante di sostegno.
Si presenta la teoria dell'oggettivazione che Radford ha sviluppato per consentire di assumere un punto di vista pragmatico nei confronti degli oggetti e dei significati matematici, secondo l'ottica vigotskijana.
Negli ultimi paragrafi viene descritto il materiale utilizzato dagli alunni ciechi, con particolare riferimento ai sussidi didattici per la matematica, visti come mezzi semiotici di oggettivazione. Si conclude prendendo in considerazione la valenza didattica delle macchine matematiche, in grado di oggettivare elementi geometrici specifici.
La linea di analisi adottata rispecchia l'idea secondo la quale la necessità di indagare i processi educativi dei soggetti non vedenti nasce dal fatto che essi siano unici e specifici nella loro disabilità. Quest'ottica ci consente di affrontare la disabilità visiva con un atteggiamento propositivo soprattutto dal punto di vista didattico. Nel proseguo della trattazione si farà riferimento a

[1–7, 10–20, 22, 23, 25, 28].

1.1 La disabilità visiva

1.1.1 Prime definizioni

Nel presente lavoro verranno utilizzati i termini *disabilità visiva*, *cecità* e *ipovisione*, con rispettivi aggettivi *disabile visivo*, *cieco* o *non vedente* e *ipovedente*. Visto che questi tre concetti sono molto diversi tra loro è utile spiegarne la differenza, in modo che siano chiare le caratteristiche che si riferiscano a ciascuno di essi.
Angelo Fiocco [15] definisce il termine disabilità visiva come un particolare tipo di disabilità in cui il deficit consiste nella minorazione del senso della vista: questa mancanza si esprime attraverso l'uso di termini specifici come cecità e ipovisione.
Citando Dell'Osbel [13], il cieco è colui che non ha nessuna percezione visiva che derivi dagli stimoli luminosi dell'ambiente esterno (cieco reale) oppure colui che, pur avendo percezioni visive, non può organizzare l'input sensoriale in percezioni più complesse funzionali ad affrontare i compiti della vita quotidiana a causa, ad esempio, di malattie o mancanza di un adeguato apprendimento (cieco funzionale).
Lo stesso autore fornisce un'esaustiva definizione di ipovisione, riferendosi al decremento della capacità adattiva della vista, intesa soprattutto come capacità cognitiva, caratterizzato dalla scomparsa di almeno una delle cosiddette prestazioni significative della vita quotidiana (lettura, scrittura, movimento autonomo nell'ambiente, ecc.).

Cecità congenita e cecità acquisita

Oltre alla differenziazione su base quantitativa del residuo visivo, le diverse tipologie di disabilità visiva possono fare riferimento alle cause di insorgenza del deficit. Si parla di disabilità visiva o cecità congenita quando l'individuo

presenta la mancanza o la riduzione della visione fin dalla nascita, mentre ci si riferisce a cecità o disabilità acquisita nel caso in cui il deficit sia insorto nell'infanzia o in seguito, causato ad esempio da malattie degenerative, da forti traumi alle componenti anatomiche del sistema visivo o da altre patologie come il diabete.
Conoscere l'età di insorgenza della cecità è importante soprattutto ai fini educativi e riabilitativi, in quanto i soggetti disabili visivi congeniti differiscono notevolmente da quelli acquisiti in particolar modo per quanto riguarda le attività relative alla vita quotidiana, come la mobilità e la cura personale.
Nei diversi Paesi i criteri usati per distinguere la cecità dall'ipovisione cambiano e per questo è necessario valutare non solo gli aspetti organici e le informazioni derivanti dalla diagnosi di tipo medico, ma anche il livello di adattamento dell'individuo con disabilità visiva all'interno dell'ambiente in cui vive [19].

1.1.2 Numeri sulla disabilità visiva

Secondo i dati dell'Organizzazione Mondiale della Sanità nel 2019 le persone con deficit visivi sono il 4% della popolazione del pianeta (circa 253 milioni). Gli ipovedenti sono la maggioranza, 217 milioni (3%), mentre i ciechi assoluti si attesterebbero attorno ai 36 milioni (0,5%).
Naturalmente, la situazione fra i paesi in via di sviluppo e le nazioni più evolute è molto diversa: mentre nei primi la cecità colpisce ancora in modo endemico le fasce infantili, nei secondi la perdita della vista è legata soprattutto all'invecchiamento e all'incidenza di malattie degenerative in età avanzata. Infatti, i dati europei indicano come quasi il 90% delle persone con disabilità visiva abbia più di 60 anni. In Italia, si stimano nel 2020 poco meno di 2 milioni di persone con disabilità visiva, pari a circa il 3% della popolazione. Di essi, 219.174 è cieco assoluto (0,3% della popolazione), mentre 1.383.922 (2,3%) mantiene un residuo visivo [1].

[1]Dati presi dal sito https://www.descrivedendo.it/home-2/ciechi-e-ipovedenti-quanti-sono/.

1.2 Aspetti sensoriali

1.2.1 Disabilità visiva e linguaggio

Il linguaggio è considerato lo strumento compensativo più funzionale per gli studenti non vedenti, poichè garantisce le opportunità di ottenere le informazioni su oggetti, su caratteristiche spaziali dell'ambiente e su eventi di cui l'individuo può fare esperienza attraverso i sensi residui nella maggior parte dei casi, ma che possono risultare inaccessibili se troppo lontani o se si muovono troppo velocemente. Lo sviluppo del linguaggio per un non vedente avviene con non poche difficoltà. Per comprendere perché, è utile considerare come si evolve questa abilità durante la crescita del ragazzo cieco e quali sono i fattori che la influenzano.
Secondo Bruner [4], all'origine del linguaggio vi è sicuramente il riconoscimento degli oggetti e delle loro proprietà, capacità che si sviluppa verso i 4-5 mesi di vita quando il bambino è in grado di osservare le cose su cui il caregiver [2] orienta il suo sguardo. Allo sguardo segue il gesto indicativo della mano (pointing) e, successivamente, la sostituzione con un suono che ha lo stesso valore di indicare categorie di oggetti e loro proprietà.
Poiché le parole sono simboli (si veda Piaget [20]), attraverso i quali viene evocata l'immagine mentale di ciò a cui si fa riferimento, prima che il bambino possa utilizzare la parola come riferimento è necessario che sia in grado di costruirsi rappresentazioni mentali di ciò che lo circonda e di cui fa esperienza. Almeno nella cultura occidentale, molti simboli o rappresentazioni mentali si basano sulle informazioni sensoriali che provengono in gran parte dalla vista; essendo privi proprio di questo, i bambini non vedenti manifestano spesso percorsi di sviluppo atipici (ad esempio mostrano difficoltà nello sviluppo del pensiero astratto e acquisiscono con molto ritardo la capacità di utilizzare gli oggetti negli scambi sociali). Questi bambini si servono principalmente dell'udito per conoscere ciò che li circonda, ma i suoni non possono

[2] Termine anglosassone che indica "colui che si prende cura", riferendosi a tutti i familiari che assistono un loro congiunto ammalato o disabile.

essere toccati ed esplorati, e spesso sono ambigui: Damascelli [11] riporta il caso di un bambino di 3 anni che sentendo il rumore di un attrezzo per tagliare l'erba nominava l'aeroplano.
Similmente, anche il tatto, usato per esplorare gli oggetti, presenta non poche limitazioni, in quanto si può toccare solo ciò che è alla portata delle nostre braccia, perciò una porzione estremamente ridotta della realtà.
Senza vista il bambino è costretto a percorrere percorsi cognitivi molto più complessi per giungere a costruirsi una rappresentazione del mondo degli oggetti, dare loro un nome e attribuire qualità. Egli apprende dagli adulti un utilizzo del linguaggio privo per lui di significato, fatto di parole riferite per lo più a stimoli visivi a lui inaccessibili, oppure si abitua a ricevere passivamente informazioni che non può ricondurre alla sua esperienza. Avviene così un'inadeguata associazione fra le parole ed il loro significato: man mano che il bambino fa esperienza dell'ambiente e arricchisce il suo bagaglio di conoscenze (dunque cresce), la sua competenza semantica migliora. Tuttavia per gli oggetti ed eventi con i quali non può avere contatto diretto e dei quali dunque non può fare esperienza personale né costruirsi una rappresentazione mentale, il bambino apprende termini di cui ignora il significato.
Appare, quindi, chiaro che i non vedenti hanno difficoltà nello sviluppo dei concetti così come nella conoscenza della realtà: ci si aspetta una deviazione rispetto allo sviluppo normale del linguaggio. Una di queste difficoltà consiste nella incapacità dei bambini ciechi nel descrivere le caratteristiche e la posizione degli oggetti, e più in generale la realtà esterna. A ciò si aggiunge l'osservazione che nei loro discorsi appaiono quasi esclusivamente riferimenti alle proprie azioni, a discapito di riferimenti alle azioni altrui: numerosi autori, quali Andersen [1], Dunela [14] e Urwin [25], hanno concluso che il linguaggio dei bambini ciechi è egocentrico, centrato su di sé, e non orientato esternamente. Oltre a questo aspetto, il linguaggio dei bambini on vedenti è meno creativo di quello dei bambini vedenti mancando di termini stravaganti, inventati dai bambini, di sovraestensioni lessicali ed è, invece, enormemente ricco di stereotipie e di espressioni tradizionali.

Ribadendo il concetto che le esperienze dei bambini non vedenti sono diverse da quelle dei normo vedenti, i loro concetti ed il loro linguaggio non possono essere gli stessi. Si parla così di verbalismo, intendendo con questo termine l'uso di parole a cui non corrispondono concetti chiari e corretti.
Il rischio di tale "fenomeno" può presentarsi a tre livelli:

- nella costruzione del linguaggio reale e concreto, cioè nel dare un nome agli oggetti ed alle persone, che è il primo linguaggio dei bambini;
- nell'uso di parole denotanti concetti cromatici e visivi, che per i ciechi si avvicinano ai concetti astratti perché non hanno un riscontro percettivo;
- nell'uso di parole denotanti i concetti astratti.

Il primo linguaggio dei bambini è strettamente legato allo sviluppo senso-motorio: la formazione dei concetti passa attraverso la costruzione di immagini, partendo dalla percezione e manipolazione degli oggetti. Il bambino, che vede l'oggetto mentre si pronuncia la parola, collega in modo corretto oggetto/immagine/parola. Per il piccolo che non vede, invece, la presenza dell'oggetto non ha significato se non lo si stimola ad un'esplorazione percettiva intenzionale attraverso gli altri sensi, in particolare al tatto e all'udito. L'elaborazione d'immagini attraverso percezioni aptiche, uditive e cinestetiche è più lenta e richiede maggior dispendio di energie e di attività per esplorare il massimo possibile di oggetti ed ambienti e necessita di miglior attenzione e concentrazione per raccogliere i dati analitici in un'immagine sintetica.
Ad esempio, se un bambino vedente forma facilmente l'idea globale di albero, un bimbo privo della vista non può crearsi questa idea se non lo tocca, non lo abbraccia, non lo esplora, non ci sale sopra, non annusa l'odore della resina e non ascolta il rumore delle foglie mosse dal vento. Il più delle volte, invece, i bambini ciechi imparano la parola "albero" dopo aver toccato, se va bene, il tronco o un rametto o qualche pezzo di legno da usare per il fuoco. Da queste percezioni e conoscenze separate è difficile formare l'idea di albero e, molto

probabilmente, la parola evocherà semplicemente una di queste sensazioni.
Il bambino cieco è più lento degli altri nel passaggio dal concreto all'astratto, cioè nel considerare l'oggetto come esemplare di una classe, isolando le caratteristiche generali dai particolari individuali, perché tende a rimanere legato ad esperienze isolate e spesso ha una conoscenza puramente funzionale degli oggetti.
Quindi, a causa della carenza di contatto diretto con i referenti oggettuali concreti, spesso acquisisce un modello linguistico apparentemente “normale”, ma costituito da termini che non provocano nella sua mente l'immagine mentale o il concetto dell'oggetto o della situazione. Il bambino assimila parole e ricordi senza che questi siano associati ad immagini ed esperienze concrete (si veda [16]).
Per favorire lo sviluppo del linguaggio nel bambino non vedente è molto importante non censurare il suo linguaggio, usarne sempre uno preciso ed esatto e controllare che la dichiarazione di aver visto e la descrizione di qualunque cosa si fondino su una conoscenza reale.
È importante verbalizzare sempre quello che si fa in modo tale da non far andare perduti tutti i messaggi che si comunicano attraverso la mimica, la gestualità ed i movimenti.
In molti casi la descrizione degli altri è l'unica fonte di conoscenza per il cieco, quindi, più la descrizione sarà oggettiva e ricca di particolari significativi, più l'idea sarà precisa. La condizione prioritaria perché la descrizione verbale di oggetti e situazioni nuove non trasmetta parole vuote, ma generi precise immagini mentali, è che queste non siano totalmente nuove e diverse da quanto conosciuto e possano essere paragonate e contrapposte a qualcosa di già noto, collegandosi in qualche modo ad uno schema di esperienze precedenti.

1.2.2 Lo sviluppo motorio per l'autonomia

La vista esercita anche lo sviluppo delle abilità motorie che si distinguono in primarie (percezione simultanea e precisa dello spostamento, riconoscimento di eventi pericolosi con sufficiente anticipo, controllo e sviluppo di movimenti

precisi e complessi) e secondarie (feedback sociali per incoraggiare il bambino ad attuare certi movimenti e non altri). A causa della mancanza o della non completa integrità della vista, il soggetto non vedente non può beneficiare in modo totale delle funzioni appena descritte. Una strategia per promuovere lo sviluppo motorio è l'attuazione di un programma mirato alla sollecitazione dei ragazzi non vedenti a essere più attivi e interattivi verso l'ambiente in cui sono inseriti. Nella programmazione della attività è utile tenere conto del livello del deficit per integrare il residuo visivo con l'udito, il tatto e il senso cinestetico.
Due tecniche finalizzate a potenziare le abilità motorie di un soggetto con disabilità visiva sono:

- modellamento tattile
  Processo in cui un soggetto tenta di riprodurre le azioni effetuate da un'altra persona o da un oggetto e in seguito di comprenderle ed interiorizzarle in maniera più completa. Questo metodo prevede che sia lo studente a esplorare fisicamente i movimenti e le posture di un modello che esegue una certa attività motoria. Un vantaggio del modellamento tattile consiste nel fatto che il ragazzo non vedente può esplorare il modello con le modalità che preferisce, focalizzandosi ad esempio su un certo movimento o una certa posizione che risultano più difficili da comprendere, esercitando così un ruolo più attivo nel proprio apprendimento.

- guida fisica
  Assistenza fisica durante l'attuazione di uno specifico movimento, in modo da percepire il ritmo e la coordinazione necessaria. È importante perché fornisce uno stimolo cinestetico relativo alla posizione nello spazio e indirizza verso il movimento corretto, portando il soggetto ad essere più controllato.

Bisogna fornire ai non vedenti e agli ipovedenti la possibilità di apprendere attraverso entrambe queste tecniche finché non decidano quale sia la più funzionale. Inoltre, prima di eseguirla, è indispensabile fornire spiegazioni dettagliate riguardo l'attività e sottolineare che ci si attende la migliore performance possibile [18].

1.3 Integrazione scolastica

1.3.1 La legge e l'educazione scolastica

La legge italiana 4 agosto 1977, n. 517, rappresenta un punto di svolta fondamentale nella storia del diritto dell'educazione per tutti, in quanto dalla sua approvazione la scuola ha aperto le porte a chi fino ad allora aveva potuto beneficiare solamente della frequenza in classi speciali e differenziali o in istituti specializzati. Il cambiamento che ne è scaturito ha investito la dimensione storica e sociale della società, portando profonde trasformazioni culturali.

La legge introduce l'idea di integrazione, definita anche come processo che si orienta a rispondere alle diversità di coloro che apprendono, al fine di garantire i diritti umani all'educazione e alle pari opportunità (si veda [6]). Oltre ad eliminare le discriminazioni provocate dalle classi differenziali, pone al centro degli interventi la programmazione educativa e didattica, da cui nascono nuovi criteri di organizzazione del lavoro scolastico, nuovi strumenti di valutazione e nuove possibilità per iniziative di integrazione e di sostegno. Secondo Vianello [26], i parametri fondamentali che la scuola deve possedere e coordinare per garantire a uno studente non vedente o ipovedente una formazione adeguata alle sue esigenze sono:

- il coordinamento tra i servizi responsabili e garanti del diritto allo studio;
- il conseguimento di obiettivi individuali specifici sia dell'alunno che della disciplina scolastica trattata;
- la figura del docente di sostegno;

- l'autonomia scolastica;

- la considerazione della molteplicità di intelligenze, grazie alla quale si possono accettare modalità e tempi di apprendimento diversi in base alle varie forme di intelligenza.

Luigi D'Alonzo [7], pedagogista dell'Università Cattolica di Roma, ritiene che, nella scuola, l'esperienza integrativa totale ha insegnato non solo ad accettare ed accogliere l'allievo con deficit, ma ha costretto gli insegnanti a promuovere un superamento del modello didattico tradizionale, quello cattedratico. Soprattutto nei cicli inferiori si sono notate delle innovazioni metodologiche molto interessanti: la didattica classica ha lasciato il passo a metodi di insegnamento molto più attenti ai bisogni della persona. Dove si lavora bene, il benessere degli studenti è aumentato in modo consistente, in quanto l'interesse verso la persona "educando" è diventato l'aspetto primario del lavoro degli insegnanti. L'integrazione della persona disabile ha favorito, inoltre, l'abbattimento di un altro muro nel modello scolastico, quello della incomunicabilità fra docenti. Ma l'integrazione delle persone con disabilità sensoriale non ha prodotto benefici in una sola direzione. Al giorno d'oggi si constata la presenza di soggetti con deficit non solamente a scuola, ma anche nel mondo del lavoro, in posti di responsabilità aziendale e politica, nello sport. Esiste nel nostro Paese una "normalità" della presenza della persona con disabilità che occorre mettere in evidenza come valore acquisito.
Si calcola[3] che oggi, in Italia, circa l'11% tra tutti i non vedenti è occupato nel mondo del lavoro: tra i lavoratori ciechi totali, il 70% è centralinista, l'8% è massofisioterapista e fisioterapista, circa l'8% è insegnante ed il restante 14% è occupato in altri settori.

[3] Dati presi da https://www.cattolicanews.it/news-dalle-sedi-ciechi-l-integrazione-riuscita.

1.3.2 La scuola per l'autonomia del non vedente

Le problematiche attorno alle quali si sviluppa l'idea di crescita e di autonomia del non vedente all'interno del contesto scolastico sono complesse e diversificate.
Dopo l'introduzione della 517/1997, si è discusso a lungo se non fosse meglio continuare ad educare i bambini con disabilità visiva all'interno di istituti speciali. Tali luoghi erano organizzati in funzione delle loro specifiche esigenze, affinché i bambini si potessero muovere in autonomia e con disinvoltura, sapendo di trovarsi in un ambiente protetto e insieme a dei coetani con lo stesso tipo di deficit. Il concetto pedagogico che veniva perseguito era la normalizzazione del cieco, prerequisito per l'inserimento in società; fino agli anni Quaranta addirittura si suggeriva alle famiglie dei ragazzi ospiti degli istituti di non farli rientrare per le vacanze estive, per timore che regredissero negli apprendimenti raggiunti fino a quel momento.
Tuttavia gli istituti mancavano di alcune qualità fondamentali per la crescita degli allievi, come gli stimoli affettivi e la possibilità di socializzare, in quanto le regole previste al loro interno ostacolavano la creazione di rapporti profondi, con conseguenze negative sul piano dell'adattamento sociale.
Risulta chiaro come l'ambiente meno strutturato e più naturale della scuola possa offrire ai ragazzi non vedenti e ipovedenti maggiori stimoli educativi; ciononostante il contesto scolastico non sempre è attrezzato per rendere efficienti ed efficaci questi stimoli. La strutturazione degli ambienti, delle aulee e dei corridoi devono garantire al non vedente l'autonomia negli spostamenti: è utile progettare percorsi adatti allo spostamento in autonomia, segnali e stimoli che aiutino a riconoscere l'ambiente in cui ci si trova e ad eliminare le eventuali barriere architettoniche presenti.

Le competenze dell'insegnante

Secondo Ondertoller e Cantele [6], bisogna sottolineare le competenze dell'insegnante. L'insegnante e l'educatore, responsabili dell'educazione scolastica dell'alunno non vedente, dovrebbero possedere le medesime competenze che

vengono richieste dalla scuola.
Innanzitutto è necessaria una conoscenza approfondita della disabilità visiva e delle sue peculiarità: trattandosi di deficit sensoriale, possiede caratteristiche specifiche e non estendibili ad altri disturbi. Si tratta di competenze da richiedere a tutti i docenti della classe in cui è inserito l'alunno non vedente, in particolare al docente di sostegno, che funge da punto di riferimento e da mediatore tra i bisogni specifici e le richieste del contesto educativo: egli dovrebbe essere particolarmente preparato sulle tecniche tiflodidattiche[4] specifiche per adattare i contenuti o le metodologie utilizzate dai colleghi nella didattica in classe. All'interno del sistema scolastico l'insegnante di sostegno opera alla pari con gli altri docenti e deve partecipare alla programmazione delle attività didattiche, facendosi portatore delle problematiche riguardanti la specificità e la personalizzazione dell'insegnamento. È perciò l'intero gruppo dei docenti che, seguendo il principio della collegialità, è tenuto a farsi carico dei bisogni personali e formativi specifici dell'alunno con disabilità visiva e a fissare gli obiettivi da raggiungere, tra cui il principale è sicuramente l'autonomia, ovvero la capacità di autodeterminazione per la propria esistenza, attraverso la costruzione e la rappresentazione di un personale progetto di vita.

1.3.3 Stime italiane

La scuola possiede tutti gli strumenti per garantire al disabile visivo un percorso di crescita educativo adeguato e ricco di stimoli: può avvalersi di garanzie legislative, utilizzare le risorse che già possiede per accoglierlo e adattarsi alle sue esigenze e può disporre della collaborazione della sua famiglia, la quale possiede conoscenze maggiori in merito alla sua storia personale ma necessita allo stesso tempo di un grande sostegno per garantirgli esperienze educative e sociali adeguate e indispensabili.

[4]La tiflodidattica è la scienza che studia le problematiche di persone con disabilità visiva nella sfera dello studio, con particolare riferimento alla Scuola dell'infanzia e alla Scuola primaria.

Secondo lo studio statistico *I principali dati relativi agli alunni con disabilità*[5] pubblicato dal MIUR nel mese di maggio 2019, relativo all'anno scolastico 2017/2018 il nostro sistema di istruzione ha accolto 3.756 alunni con disbilità visiva su un totale di 8.664.367 inscritti (0,04%). I disabili visivi sono distribuiti nei vari ordini e gradi di scuole come di seguito specificato:

- 380 nella scuola dell'infanzia (10% degli alunni con disabilità visiva);
- 1.236 nella scuola primaria (33% degli alunni con disabilità visiva);
- 853 nella scuola secondaria di primo grado (23% degli alunni con disabilità visiva);
- 1.407 nella scuola secondaria di secondo grado (34% degli alunni con disabilità visiva).

Dallo studio statistico, di cui in Figura 1.1 sono riportati alcuni grafici, emerge la seguente analisi relativa alla distribuzione degli alunni con disabilità visiva tra istituti a gestione statale e non statale: considerando la popolazione degli alunni con disabili, la percentuale con disabilità visiva è maggiore nelle strutture non statali (2% degli alunni disabili frequentanti) rispetto alle statali (1,4% degli alunni disabili).

Si evince inoltre che nella scelta della scuola secondaria prevale la presenza degli alunni ciechi nei licei (43,8% del totale degli alunni con disabilità visiva iscritta alle scuole secondarie di secondo grado) rispetto agli istituti tecnici (25,7%) ed agli istituti professionali (30,5%).

Dal grafico si nota che la distribuzione dei disabili visivi, nei vari tipi di scuole, si avvicina molto a quella dei normodotati: in particolare, la scelta dei licei è quasi la stessa.

[5] Reperibile nel documentale ufficiale del MIUR all'indirizzo web `https://www.miur.gov.it/documents/20182/0/I+principali+dati+relativi+agli+alunni+con+disabilit\%C3\%A0+a.s.2017_2018.pdf/869269c7-925e-00f8-b9bd-b4d92e643f67?t=1559642805496`

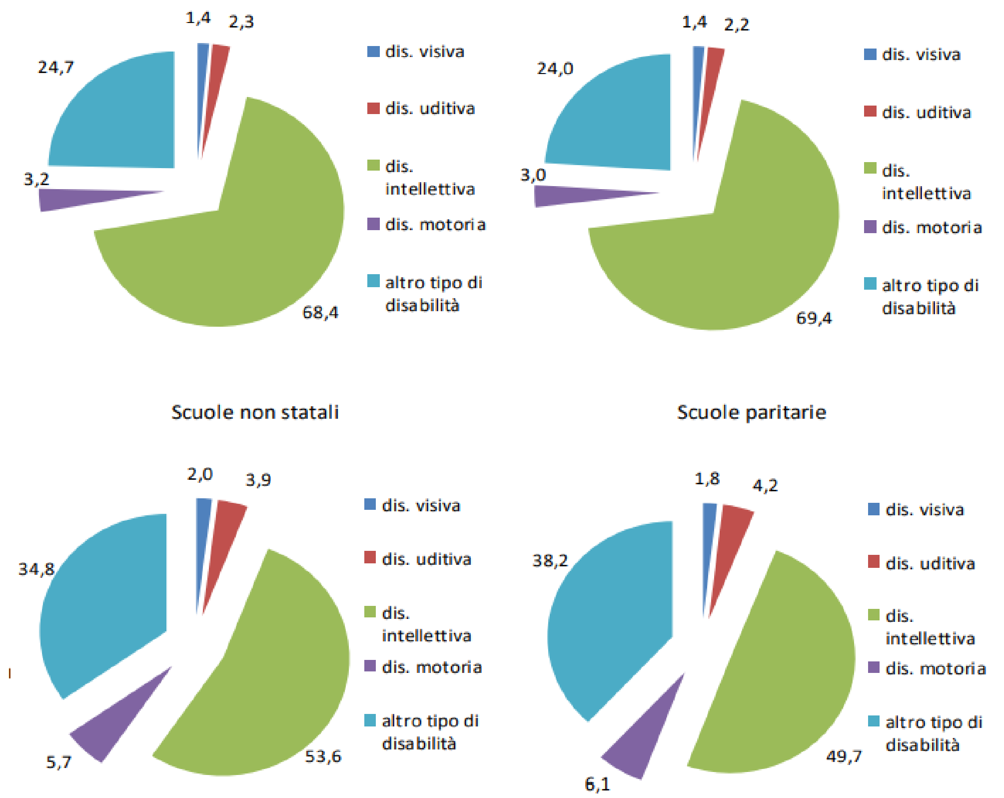


Figura 1.1: Alunni con disabilità per gestione e tipologia di disabilità, a.s. 2017/2018.

1.4 Didattica della matematica e cecità

J. E. F. del Campo in [12] sottolinea come molti insegnanti si chiedano quale matematica è possibile insegnare ai non vedenti e se sia necessario effettuare dei tagli o delle riduzioni nei curricoli. Oltre alle difficoltà insite nella materia, che derivano dall'astrattezza della disciplina, esistono difficoltà relative alle trasformazioni delle percezioni sensoriali in rappresentazioni mentali, come spiegato nella Sezione 1.2. La risposta di del Campo è inequivocabile: non si tratta di ridurre gli argomenti da trattare, ma solo di adattarli. Egli parte dalla convinzione che la matematica, almeno ai livelli base, non si insegni, ma si impari: impararla significa scoprirla da soli, l'insegnante è solo

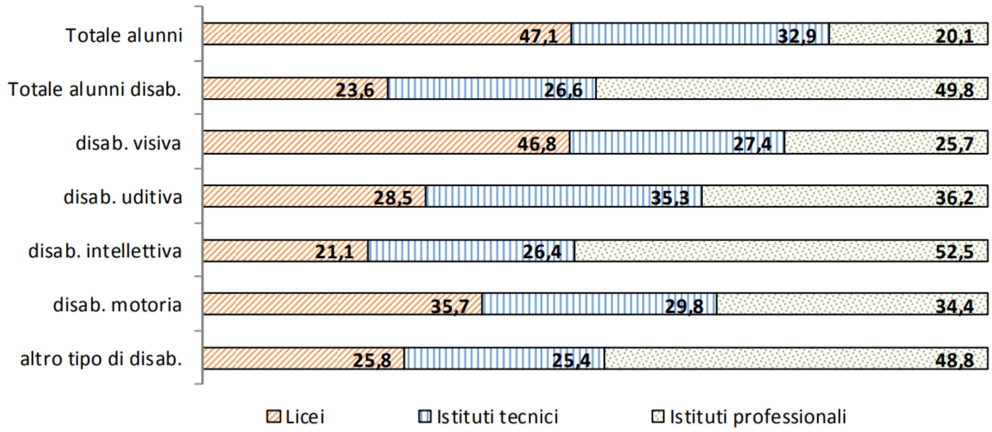


Figura 1.2: Alunni con disabilità per tipo di scuola secondaria di II grado, a.s. 2017/2018.

colui che mette a disposizione gli aiuti necessari. In effetti l'insegnamento della matematica ad un alunno con minorazioni visive non è molto diverso da quello che dovrebbe essere rivolto ad un normodotato, con il rispetto dei tempi necessari per l'esplorazione tattile e per il formarsi dei concetti con un'adeguata operazione di sintesi di percezioni successive.

Per avviare un alunno all'educazione logico-matematica, è necessario che l'insegnante verifichi come egli percepisce il proprio corpo, come si muove, come utilizza le mani, quindi l'esperienza sullo spazio, sulla forma e sui simboli. Lo studente deve fare esperienze di conoscenza della realtà e controllare i concetti topologici fondamentali per definirla. Tutto ciò è fondamentale per un non vedente, perché solo la conoscenza della geometria può permettergli di rappresentarsi mentalmente in maniera efficace luoghi e ambienti, quindi di sapersi orientare autonomamente in essi (l'autonomia è uno degli obiettivi da raggiungere a scuola, come spiegato nella sezione precedente).

Per quanto riguarda la matematica della scuola secondaria, gli alunni non vedenti presentano solitamente difficoltà nella lettura e nella scrittura di espressioni algebriche complesse, più che altro per motivi tecnici, dovuti alla pesantezza della notazione Braille. Una possibile soluzione al problema è proposta dal progetto LAMBDA (si veda Sezione 1.6.2). Un'altra difficoltà rilevante è quella della rappresentazione spaziale. In questo campo la problematica è più complessa, perché coinvolge la comprensione dei concetti, che non sono di facile intuizione neanche per alunni vedenti (basti pensare al concetto di punti all'infinito). Nonostante nella scuola secondaria di primo grado siano piuttosto diffusi sussidi che permettono di scomporre figure solide, il passaggio dalla rappresentazione tridimensionale a quella bidimensionale risulta particolarmente complessa per gli alunni non vedenti. La lettura di un'immagine appiattita su un foglio necessita di una grande capacità astrattiva, per decifrare le inevitabili deformazioni che si sono compiute. Attualmente esistono poche ricerche finalizzate ad analizzare la costruzione di contenuti inerenti la geometria.

1.4.1 Teoria dell'oggettivazione di Radford

La teoria dell'oggettivazione sviluppata da Radford in [23] è fondamentale per la metodologia di ricerca alla base di qualsiasi sperimentazione didattica, e parte da un quadro teorico di impostazione vygotskijana.
Vygotskj ha posto l'attenzione sulla funzione degli strumenti tecnici, centrali nella progettazione didattica presentata in questa tesi (vedi Sezione 1.7.1), che trasmessi socio-culturalmente, rivestono un ruolo fondamentale nei processi di sviluppo: gli strumenti non si limitano ad agire sul mondo esterno, ma inducono trasformazioni all'interno del soggetto che li utilizza, incorporando elementi importanti del sapere culturale che l'uomo nel corso della sua evoluzione ha elaborato. Sono, quindi, unità culturali legati alla storia, ma diventano unità sociali integrate dal bambino tramite i processi interattivi.
Nel caso di studenti con deficit visivo, la teoria sviluppata da Radford risulta indispensabile nella didattica della matematica poiché prevde l'utilizzo simultaneo, come mezzi semiotici di oggettivazione, dell'esplorazione tattile (o, più precisamente, dell'esplorazione aptica) e di particolari strumentazioni volte a sostituire tutti i mezzi semiotici che dipendono dalla vista (segni scritti, lavagna e gestualità dell'insegnante).

L'apprendimento della matematica rappresenta un'attività riflessiva mediata: gli oggetti matematici esistono già, non in senso strettamente realistico, ma come entità culturalmente e socialmente riconosciute. Questa presa di coscienza dell'oggetto matematico da parte dello studente non è un processo passivo, ma richiede un impegno reale nelle attività matematiche, non per *costruire l'oggetto*, che è già presente nella cultura, ma per *dargli un senso.*
Questa attribuzione di significato è un processo attivo, basato sulla comprensione e l'interpretazione, dove si incontrano le biografie individuali e le categorie concettuali comuni. Radford definisce questo processo *oggettivazione.*
Imparare, dunque, corrisponde ad oggettivare qualcosa:

> «L'apprendimento è un atto intenzionale in cui il soggetto incontra e prende coscienza (pone di fronte alla propria consapevolezza) dell'oggetto matematico, attraverso un'attività mediata che fornisce senso all'oggetto appreso» ([23, p. 111]).

Mezzi semiotici di oggettivazione

L'apprendimento degli oggetti matematici avviene grazie ai mediatori semiotici della cultura, storia e strutture sociali: gli studenti impegnati nell'attività matematica non fanno ricorso solamente ai registri formali e assiomatici, ma anche al linguaggio naturale, ai gesti, all'attività cinestetica, ai movimenti del corpo, ad artefatti e strumenti, che mediano l'attività riflessiva ed indirizzano culturalmente gli "atti intenzionali" verso l'oggetto matematico. Tali mediatori, nel caso della matematica, sono incarnati da sistemi di segni chiamati mezzi semiotici di oggettivazione.
Radford sottolinea che gli oggetti, in quanto tali, non sono in grado di esprimere direttamente l'intelligenza storica che contengono, perciò è fondamentale il loro uso nelle attività e nei contatti con le altre persone che sanno come leggere questa intelligenza e ci aiutano ad acquisirla. Diversamente, il linguaggio geometrico si ridurrebbe ad un gruppo di geroglifici, e l'intelligenza in esso contenuta non sarebbe afferrata senza il contributo dell'attività

sociale che ha luogo nel contesto scolastico.
I mezzi semiotici di oggettivazione sono organizzati come pezzi di attività semiotiche degli studenti in cui azione, gestualità e parola cooperano insieme. In questo modo, anche se l'apprendimento della matematica avviene in modo diacronico all'interno di una classe, i mezzi semiotici di oggettivazione sono usati in modo sincronico: ad esempio, se osserviamo degli alunni impegnati in un'attività di geometria, si nota che oltre al linguaggio simbolico fanno ricorso a gesti, azioni e artefatti propri delle loro esperienze.

Embodied experience

La teoria dell'oggettivazione della conoscenza designa l'atto sensoriale, spaziale e temporale dell'attività educativa col termine di esperienza *embodied*[6], contrapposta all'esperienza *disembodied*. L'esperienza embodied, nella prospettiva di Radford, è intrinsecamente sociale e culturale e la coscienza dell'individuo acquisisce la sua identità nell'ambito della pratica sociale: attraverso i processi di oggettivazione l'individuo trova il proprio sè come controparte della soggettivazione.
Sono note le difficoltà incontrate dagli studenti quando la pratica matematica si limita al solo linguaggio simbolico. Il problema è dato dal passaggio dalla dimensione embodied a quella disembodied dell'esperienza: la matematica è per definizione disembodied, perché i suoi oggetti culturali non hanno natura concreta e sono accessibili solo attraverso una pratica mediata.

[6] In italiano si tradurrebbe incorporato, ma in letteratura si preferisce utilizzare il termine inglese.

1.5 Il materiale nella didattica della matematica per ciechi

I progressi pedagogici sono stati accompagnati da un incremento nel materiale da utilizzare per l'alunno: materiale pedagogico generale, comune a varie discipline, e specifico per ogni area. Per quanto concerne quest'ultimo, bisogna ricordare l'impulso dato dalla Montessori e dalla scuola italiana (Emma Castelnuovo) per far diventare la classe di matematica una classe-laboratorio in cui gli alunni confezionano il materiale da utilizzare: in questo modo si tendono a coprire le necessità comunicative ed espressive dell'alunno, ad agevolare la comprensione dei contenuti, a superare limitazioni personali, insomma a favorire il processo di matematizzazione, si veda [12]. L'addestramento dell'alunno cieco nell'uso del materiale porta al collegamento con aree diverse di conoscenza: con quella del linguaggio nel caso del materiale di lettura e scrittura, con quella dell'espressione plastica nel caso del disegno e con quella della tecnologia e della fisica nelle situazioni di insegnamento ed apprendimento (ad esempio, la mancanza di abilità manuale nel disegno e nella manipolazione del materiale rallenta il processo di apprendimento della matematica).

1.5.1 Materiale generale

Il materiale generale deve essere idoneo all'esplorazione ed al riconoscimento aptico. J. E. F. del Campo in [12] afferma che, per un alunno cieco, il materiale manipolabile deve essere:

- cineticamente statico, almeno per le situazioni iniziali;
- di grandezza complessiva tale che sia afferrabile al massimo con entrambe le mani;
- con parti ben discriminabili al tatto, nelle loro strutture e rilievi;

- resistente e stabile all'azione meccanica dell'esplorazione aptica, liberando così l'alunno dalla preoccupazione di esplorare delicatamente;

- in posizione adeguata, mantenendo l'equilibrio dell'alunno.

È possibile che l'alunno stesso presenti delle difficoltà esplorativo-percettive: la mancanza di sensibilità tattile può impedirgli di conoscere facilmente strutture e rilievi più o meno ravvicinati, la posizione e la distanza dall'oggetto in esame possono causare problemi nell'esplorazione, ecc. Questi disturbi non sono frequenti: il professore li rileva facilmente e può collaborare con l'alunno affinché egli percepisca chiaramente la situazione di partenza. È opportuno prevederli onde evitare sgradevoli sorprese.

1.5.2 Materiale pedagogico specifico

Il materiale specifico per l'insegnamento della matematica ha lo scopo di favorire il processo di matematizzazione: deve aiutare la comprensione della disciplina, attraverso l'assimilazione corretta di concetti e l'acquisizione delle abilità tecniche.
Seguendo [12], il materiale specifico deve avere certe qualità in sintonia con il suo scopo; deve essere quindi:

- trasportabile
  Affinché il materiale possa essere utilizzato dagli alunni ciechi è assolutamente necessario che sia facilmente trasportabile, altrimenti la perdita di tempo nel trasporto rompe il ritmo delle lezioni e disperde lo sforzo dell'alunno.

- adeguato alle caratteristiche percettive
  Le dimensioni e la qualità di un dispositivo possono rendere difficile la percezione aptica dell'insieme, con i problemi che ciò comporta: l'alunno vedente può osservare in ogni particolare un oggetto, al contrario del cieco che dovrà disporre del suo materiale.

- semplice
  Il materiale, se non è semplice da usare, non favorisce la comprensione. Se comporta una difficoltà supplementare di comprensione, può causare fatica e perdita di tempo, se crea difficoltà e non diverte l'alunno, risulta inutile.

- economico
  Una spesa è giustificata dall'uso continuato del materiale, e dal fatto di essere effettivamente insostituibile e educativamente redditizio: in questo modo si potrà parlare di investimento educativo.

- confezionato dallo stesso alunno
  Ogniqualvolta sia possibile, l'alunno cieco deve fare le cose da solo: il materiale confezionato da egli stesso, quindi, ha un valore didattico molto superiore rispetto a quello acquistato sul mercato. Il disabile visivo assicura una profonda conoscenza del suo modo di essere e dei comportamenti possibili ed ha uno stimolo formidabile per lo sviluppo delle capacità di manipolazione, creative e di espressione plastica.

- con qualità sensoriale
  Queste qualità possono essere determinanti perché il materiale risulti attraente per l'alunno. Una situazione matematicamente ricca, ma presentata con materiale insignificante perde interesse ad essere studiata.

L'attività di manipolazione del materiale adattato, sia di scrittura-lettura sia qualsiasi altro manipolato, è più lento di quello utilizzato dagli alunni vedenti: questo include il rischio che il cieco resti escluso dall'attività del gruppo, o che il ritmo generale rimanga condizionato da quello dell'alunno non vedente. Che ciò non accada, deve essere un obiettivo principale della condotta del professore.

1.5.3 Il libro di testo

I libri di testo, di ogni disciplina, hanno registrato un'evoluzione nel tempo, da quando cominciarono ad essere utilizzati e soprattutto negli ultimi 150 anni, a seguito della riduzione dei costi della produzione bibliografica. È cambiata, in modo evidente, la presentazione del libro: all'inizio includeva tutte le aree disciplinari ed era privo di illustrazioni, con il passar del tempo, ha subito una progressiva introduzione del disegno e della fotografia, ha visto la separazione dei testi secondo materie, l'introduzione del colore, la suddivisione in colonne e la divisione dentro la stessa area a seconda dei temi o delle parti. Il contenuto è stato modificato man mano che si progrediva nella pedagogia e nella didattica; ai testi che contenevano esclusivamente ciò che l'alunno doveva imparare, sono state successivamente aggiunte indicazioni su come capire meglio o su come giungere ai risultati, in modo più o meno deduttivo.
Nei testi per i non vedenti non è stato possibile includere i cambiamenti formali, date le limitazioni del sistema Braille e dei procedimenti di stampa.
J. E. F. del Campo in [12] afferma che i testi impiegati dall'alunno cieco non sono stati scritti pensando a lui né alle caratteristiche della stampa Braille.
Per quanto riguarda i testi scientifici, in particolare matematici, si sono riscontrati dei problemi riguardo l'uso dei colori nei diagrammi e nei grafici, la traduzione dei diversi caratteri di stampa (neretto, corsivo e neretto-corsivo) e l'uso dei simboli all'interno delle formule: in Braille si sono tentate alcune soluzioni, come ad esempio l'introduzione di "indicatore di corsivo" o "indicatore di numero" rispettivamente per l'inizio di un testo in corsivo e l'inizio di una formula matematica. Tuttavia l'espressione in Braille di tutte queste varianti comporta necessariamente un aumento delle dimensioni fisiche del testo: aumentando il volume dell'opera in nero si hanno ripercussioni sul numero di volumi in Braille (la trascrizione di un singolo libro di matematica di una scuola secondaria di secondo grado si può trasformare in 4 volumi in Braille).
Il protocollo di intesa stipulato tra il MIUR e l'UICI il 23/08/2018, promuove

la realizzazione e la distribuzione di materiale tiflodidattico e tifloinformatico sul territorio, in particolare nelle scuole dove sono presenti studenti con disabilità visiva, assicurando che questi dispositivi siano conformi al codice Braille italiano; inoltre promuove la fornitura dei testi scolastici nei diversi formati fruibili per gli alunni ciechi, nei tempi più congrui ad assicurarne la fruizione fin dal primo giorno di scuola. La trascrizione dei libri di testo scolastico viene effettuata dalla Biblioteca Italiana per i Ciechi di Monza o da uno dei Centri di trascrizione specializzati (ad esempio l'Istituto Cavazza di Bologna), così che all'avvio dell'anno scolastico l'alunno disponga dei testi adattati. La trascrizione, che è integrale per la scuola primaria, è invece selettiva per gli altri ordini di scuola: le parti di testo da trascrivere sono concordate con gli insegnanti in base agli argomenti di studio effettivamente svolti nel corso dell'anno scolastico. I testi consegnati sono in formato cartaceo o digitale. I volumi stampati su carta, come già accennato, a causa delle dimensioni "obbligate" del Braille per grandezza e spessore dei segni, risultano voluminosi e ingombranti; la soluzione a questo inconveniente si chiama "opera in moduli", si veda [12]. Il testo, che si divide in unità tematiche, viene stampato separatamente; ciò permette, allo stesso tempo, che parti di un medesimo testo siano utilizzati in corsi diversi. I grafici e i diagrammi rimangono una sfida unica per la rappresentazione non visiva. Molti dei consueti strumenti per presentare informazioni usando il colore o lo spessore di una linea e l'ombreggiatura non sono disponibili nella grafica tattile. Le punte delle nostre dita hanno una risoluzione molto più bassa rispetto ai nostri occhi, quindi la dimensione dell'immagine deve essere più grande (e comunque adattarsi alla pagina) e le etichette incluse nell'immagine devono essere tradotte in Braille e posizionate in modo tale da non interferire con le linee disegnate. I diagrammi che mostrano forme tridimensionali sono infine particolarmente difficili da "leggere" in un formato tattile.

1.6 Strumentazioni come mezzi semiotici di oggettivazione

Nella didattica speciale per i non vedenti, l'uso di mediatori semiotici di oggettivazione risulta fondamentale: alcuni artefatti, i gesti, i simboli e le parole sono portatori di atti intenzionali verso l'oggetto matematico (si veda il paragrafo 1.4.1), il quale esiste sia in una relazione personale con un soggetto con deficit visivo sia in una relazione istituzionale con la cultura dalla quale è emerso e con il gruppo sociale che gli conferisce un valore di conoscenza (ad esempio il codice Braille nella trascrizione dell'enunciato di un teorema). È bene ricordare che questi mediatori semiotici non sono semplici arnesi con i quali lo studente cieco manipola il mondo, ma sono portatori di una conoscenza storica costruita dall'attività cognitiva delle generazioni precedenti (si pensi all'abaco, ai regoli di Genaille o, ancora al già citato codice Braille). Tali mezzi determinano e costituiscono le pratiche socialmente condivise nelle quali si sviluppano i processi di oggettivazione.

1.6.1 Percezione aptica

Per una persona priva della vista, la mano è in grado di costruire una rappresentazione mentale completa della forma che ha esplorato: il tatto può essere considerato una forma di vista a distanza ravvicinata e la vista una forma di tatto a distanza. Questo perché la vista permette il cosiddetto colpo d'occhio, essendo sintetica ed istantanea, a differenza del tatto che è un senso analitico e successivo.

Esiste un collegamento molto stretto tra il tipo di esplorazione che si conduce con le mani e quella che compiono gli occhi e ciò porta a dedurre che vi è una relazione innata latente che unisce campi sensoriali apparentemente distinti e conferma l'unità organica dei sensi. I dati della percezione tattile sono per un vedente un arricchimento e una precisazione di quelli della percezione visiva, e viceversa. Il tatto da solo non è sufficiente per conoscere la realtà: è necessaria la cosiddetta *percezione aptica* (letteralmente *toccare*

con attenzione) che coinvolge tutto l'essere, presupponendo un'elaborazione cosciente degli elementi semplicemente percepiti, sommandoli tra di loro per ottenere un tutto strutturato (si veda Zaniboni [28]).
Con la sola percezione tattile si costruisce uno spazio limitato, in cui manca il concetto di prospettiva, così come quando manca uno sfondo nella collocazione spaziale degli oggetti. È necessaria l'integrazione di tutte le percezioni ottenute con i sensi mancante la vista: tatto, udito, olfatto, senso termico, cinestesia, sensibilità muscolare e immaginazione correttamente formata per estendere il concetto di spazio. È grazie alla sintesi di tutte queste percezioni che un non vedente si ferma prima di toccare un ostacolo, senza nemmeno sfiorarlo.
Per la formazione delle immagini, sono necessarie due tipi di esplorazioni: una prima esplorazione rapida e sommaria, per comporre uno schema complessivo dell'oggetto, e una seconda esplorazione fine, che analizza in maniera dettagliata una ristretta porzione della superficie e colloca il particolare percepito nel quadro dell'immagine di insieme. Per tutto questo è indispensabile, fin dall'infanzia, un'educazione delle dita alla motricità fine, alla prensilità e alla capacità di manipolazione. Per poter sintetizzare ed integrare i dati dell'esperienza e le informazioni raccolte dagli altri canali percettivi, è necessario per uno studente con minorazioni visive che la mano diventi l'organo primario di percezione e che il coordinamento visivo-motorio sia sostituito dal coordinamento bimanuale.

1.6.2 Sussidi per ciechi nella didattica della matematica

Il termine "sussidio" deriva dal latino "subsidium" ed ha un significato oscillante tra quello generico di "mezzo" e quello più specifico di "aiuto". In particolare il sussidio didattico si configura come lo strumento essenziale per la realizzazione del processo di apprendimento; quindi il sussidio "tiflodidattico" (dal greco tiflòs che significa cieco) è quello che risponde alle particolari esigenze educative dell'alunno con minorazione visiva. Si tratta di strumenti

attraverso i quali si possono potenziare le capacità di esplorazione tattile, le abilità operative e di autonomia, la competenza linguistica e comunicativa del soggetto con deficit visivo.
I sussidi tifloditattici più utilizzati nella didattica della matematica sono:

- ausili legati al sistema Braille: cubaritmo, casellario romagnoli, dattilobraille, dattiloritmica;
- altri ausili tiflodidattici: geopiano, cuscinetto, piano cartesiano, piano in gomma, righe, squadre e goniometri con segnalazioni tattili;
- strumenti informatici: software per la sintesi vocale, software per l'ingrandimento, barra Braille;
- hardware e softwere per l'accesso a testi scientifici: stampante Minolta, MathPlayer, OCR, Infty, BlindMath, Lambda, Axessability;

Anche le macchine matematiche possono essere considerate un sussidio per la didattica dei non vedenti: esse verranno descritte nella Sezione 1.7 ed approfondite nel Capitolo 3, in quanto mediatori semiotici principali scelti nella progettazione dell'attività didattica esposta.

Ausili legati al sistema Braille

Secondo Quatraro e Ventura [22], il codice Braille, a differenza dei codici Morse e della Marina, non si rivolge all'occhio o all'orecchio, ma al tatto. Si basa su punti in rilievo e la sua caratteristica fondamentale è la semplicità con cui sono disposti, che tuttavia richiede a chi legge di compiere operazioni mentali e di interpretare ciò che c'è sulla carta.
I punti in rilievo hanno caratteristiche ben precise: sono collocati in un rettangolo immaginario disposto con la base minore parallela al lettore e in base al numero e alla collocazione nello spazio (vi sono sei posizioni possibili) assumono un significato diverso. Il sistema comprende 64 segni, derivanti dalle possibili combinazioni dei punti, con i quali si possono rappresentare oltre

alle lettere dell'alfabeto, anche i caratteri numerici e la notazione musicale, grazie all'utilizzo di speciali prefissi che non hanno alcun corrispondente nella scrittura ma che marcano il significato del segno che li segue. La Figura 1.3 mostra i segni in Braille in cui i punti in rilievo, e quindi percepibili al tatto, sono rappresentati in nero.

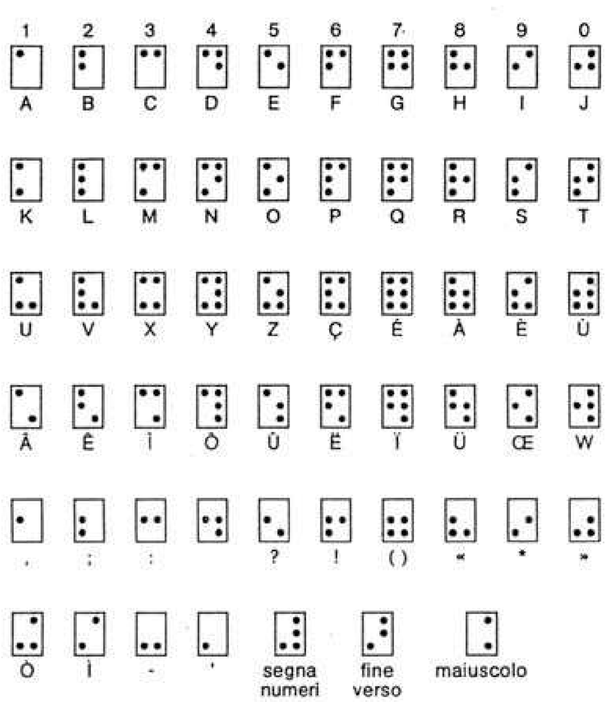


Figura 1.3: Alfabeto Braille.

Cubaritmo

Si tratta di un casellario rettangolare di circa 25x20 cm costituito da 300 cavità cubiche nelle quali vengono inseriti cubetti di lato 1 cm (Figura 1.4). Sulle 5 facce del cubo (la sesta è vuota) vi sono segni Braille, che per rotazione possono occupare posizioni diverse nello spazio e formare così i caratteri aritmetici desiderati. Il cubaritmo è utile soprattutto per lo svolgimento delle quattro operazioni e per l'incolonnamento, in quanto consente una discreta velocità e segue le regole della disposizione in colonna comuni anche ai vedenti.

Casellario Romagnoli
È un casellario di legno (Figura 1.5) formato da 100 prismi colorati che, collocati nelle sedi formate dalle intersezioni dei listelli di legno, compongono lettere e parole (e quindi anche numeri).

Dattilobraille
Si tratta di una vera e propria macchina da scrivere per non vedenti (Figura 1.6): nella versione meccanica ci sono 6 tasti disposti in fila e corrispondenti ai 6 punti Braille, un tasto per la spaziatura e 2 tasti funzione (uno per l'avanzamento riga e uno per il ritorno carrello). Per scrivere le lettere i tasti-punti devono essere premuti contemporaneamente, con un unico atto motorio (ad esempio per scrivere la lettera *b* si dovranno premere insieme i tasti 1 e 2), e si procede da sinistra verso destra.

Dattiloritmica
Consente di eseguire operazioni più complesse e calcoli algebrici: è costituita da piastre parallele, ognuna delle quali contiene tasti che se premuti in modo opportuno consentono di creare i caratteri numerici in rilievo (Figura 1.7).

Altri ausili tiflodidattici

Geopiano
Viene utilizzato per lo studio delle figure geometriche piane: si tratta di un piano di gomma sul quale sono presenti fori equidistanti e paralleli, all'interno dei quali si intersecano i chiodi che corrispondono ai vertici della figura da realizzare. Per definire i lati, invece, si tende un elastico attorno ai chiodi (Figura 1.8). Nonostante la semplicità, ha incontrato uno scarso favore da parte degli alunni non vedenti, che riportano difficoltà nel percepire tattilmente le figure tra i chiodini, inoltre non consente di tracciare agilmente le linee interne alle figure.

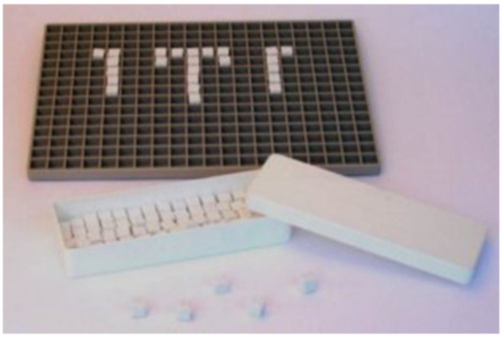


Figura 1.4: Cubaritmo.

Figura 1.5: Casellario Romagnoli.

Figura 1.6: Dattilobraille.

Figura 1.7: Dattiloritmica.

Cuscinetto

Si tratta di un cuscino in gommapiuma piatto e di forma quadrata o rettangolare su cui, tramite spilli, si fissano cordoncini o fogli di piano cartesiano (si veda pagina 31) per poi disegnare figure geometriche o soggetti liberi (Figura 1.9); è molto utile per il potenziamento della coordinazione bimanuale, il rafforzamento dei concetti topologici e lo sviluppo dell'immaginazione. Nonostante ciò presenta anche alcuni svantaggi, fra cui i tempi lunghi di realizzazione e l'impossibilità di conservare l'elaborato.

In alternativa al cuscinetto, si può usare il piano in velcro, sul quale il cordoncino aderisce perfettamente applicando una leggera pressione.

Piano Cartesiano
Tavola in cartoncino plastificato di 35x45 cm su cui è riprodotta in rilievo una quadrettatura da 1 cm di lato con linee di colore blu su sfondo bianco (Figura 1.10). Questi fogli si prestano per la rappresentazione di curve, andamenti e grafici. Possono essere utilizzati bloccandoli con spilli sul cuscinetto e delineando il grafico con la normale tecnica del cordoncino, dopo aver indicato in Braille in ascissa e ordinata le variabili adottate.

Piano in gomma
Tavola di legno rivestita di una gomma particolare: si fissa un foglio di plastica sul piano e con una biro a sfera si traccia il disegno che apparirà in rilievo (Figura 1.11).

Righe, squadre e goniometri con segnalazioni tattili
Si tratta di righe, squadre e goniometri di plastica (o legno) con incisi i valori relativi ai cm, mm e gradi, come in Figura 1.12.

Strumenti informatici

Negli ultimi anni, il computer è stato introdotto all'interno delle classi non solo come ausilio didattico per gli alunni non vedenti o ipovedenti, ma anche per altri soggetti con differenti disabilità. Nel caso particolare di giovani disabili visivi la tecnologia informatica ha progettato soluzioni molto efficaci per l'apprendimento e l'integrazione.
Per quanto riguarda la fruizione di testi in formato digitale, gli studenti non vedenti e ipovedenti si avvalgono di:

Software per la sintesi vocale
La sintesi vocale (in inglese speech synthesis) è la tecnica per la riproduzione artificiale della voce umana. I sistemi di sntesi vocale sono noti anche come text-to-speech (TTS) per la loro possibilità di convertire il testo in parlato. Le applicazioni che utilizzano la sintesi vocale per

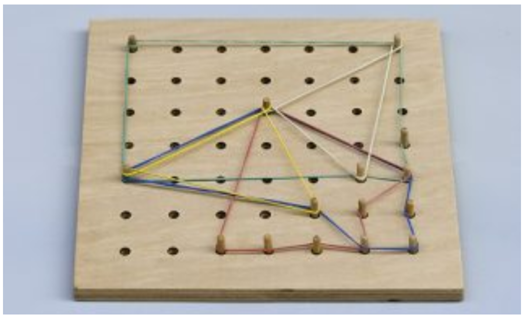


Figura 1.8: Geopiano.

Figura 1.9: Cuscinetto per disegno.

Figura 1.10: Piano cartesiano.

Figura 1.11: Piano in gomma.

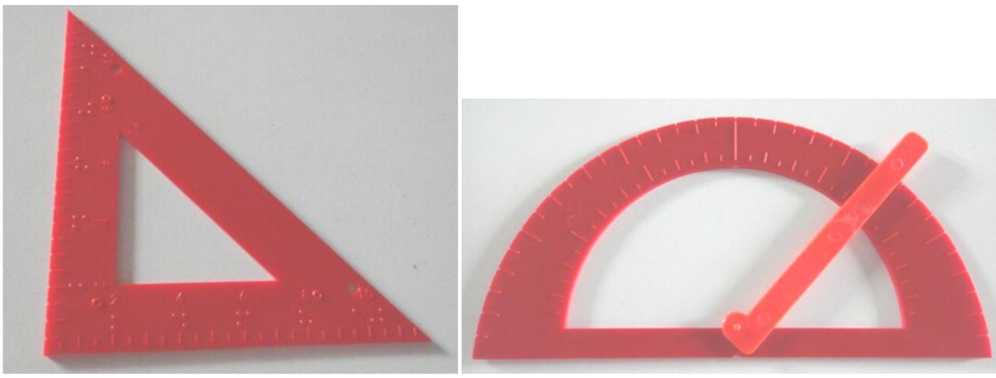


Figura 1.12: Squadra e goniometro con segnalazioni tattili.

leggere il testo mostrato sullo schermo del PC si chiamano screen reader, e le principali sono: Jaws, NVDA (per Windows), VoiceOver (per Apple) e Ocra (per Linux).

Software per l'ingrandimento

Permettono di ingrandire tutto ciò che appare sullo schermo del PC e offrono il vantaggio del supporto vocale. Ogni testo viene letto dalla sintesi vocale: è possibile quindi controllare la correttezza di un testo anche mentre viene digitato, ma anche ottenere informazioni relative a menu e pagine web.
La capacità di in gradimento di questi supporti va da 2 a 40-60 volte, sono a colori ed hanno la messa a fuoco automatica. I software di ingrandimento per Windows con supporto vocale, funzione OCR (si veda pagina 34) e touch screen più usati sono Lunar, Magic e Zoomtext.

Barra Braille

È una periferica di computer che permette di leggere attraverso il tatto (quindi in Braille) il contenuto della videata: esiste nel formato 12, 20, 24, 32, 40, 64 o 80 caratteri, anche se le più usate e diffuse sono quelle da 32 e 40 caratteri.
Si collega al computer mediante cavo USB, seriale o collegamento blue tooth (Figura 1.13).

Accesso a testi scientifici

Le tecnologie finora descritte sono pienamente soddisfacenti per la fruizione di testi senza formule, grafici o tabelle.

Hardware: Stampante Minolta

Per quanto riguarda la lettura dei grafici e delle tabelle, si può provvedere ad una descrizione scritta, o, in alternativa, ad una stampa in rilievo. È possibile utilizzare un "fornetto" per riprodurre in rilievo i disegni precedentemente stampati su una carta speciale: questa tecnica si chiama tecnica Minolta, in quanto fu Minolta la prima ditta a

Figura 1.13: Barra Braille.

commercializzare la carta a microcapsule e il fornetto a raggi infrarossi (Figura 1.14). Il procedimento si basa sul fotocopiare il disegno che si vuole riprodurre (un disegno adatto per l'esplorazione tattile, in bianco e nero o a colori) sul foglio di carta speciale formato da microcapsule termosensibili (disponibile in formato A4 e A3). È importante in questa fase non usare stampanti laser o fotocopiatrici che producano un calore eccessivo, per evitare una prima e indiscriminata espansione delle cellule. Successivamente basta far scorrere il foglio stampato all'interno di uno speciale fornetto a raggi infrarossi. Il calore prodotto dal fornetto causa il rigonfiamento delle microcapsule. Ad espandersi sono esclusivamente le cellule su cui risulta depositato l'inchiostro nero mentre le parti bianche o colorate rimangono lisce.

Software

I principali documenti digitali sono .doc/.docx, .pdf, .html, .txt e .tex: i programmi di sintesi vocali e la barra Braille prima descritti riescono ad interpretare bene la scrittura e la lettura delle formule matematiche,

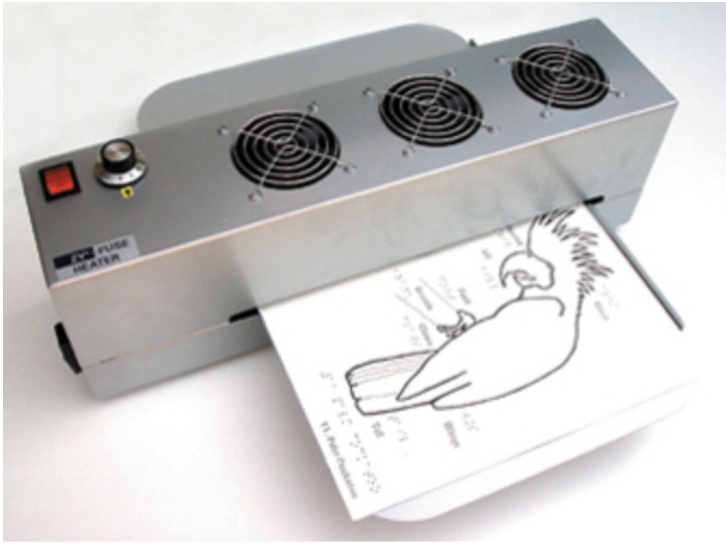


Figura 1.14: Stampante a raggi infrarossi e foglio a microcapsule.

purché queste risultino scritte con linguaggi di markup adeguati (come ad ad esempio Html e LaTex).
Esistono diversi software che consentono la lettura di tutte le estensioni dei file:

– MathPlayer
  I documenti in .doc/.docx sono prodotti e gestiti dalla suite Microsoft Office e vanno strutturati in modo opportuno affinché la barra Braille possa accedervi in modo appropriato e, ad esempio, tradurre in modo giusto gli stili differenti. Per una lettura/scrittura efficace da parte dei non vedenti, bisogna integrare il programma con le utility MathPlayer e MathType. Questi ultimi software riescono ad interpretare correttamente anche i documenti .html e .txt.

– OCR
  I documenti .pdf a volte risultano non accessibili: dipende dal modo in cui sono prodotti. Se sono generati da file .doc e .tex è sufficiente testarne l'accessibilità con software opportuni, come

Axessibility (si veda pagina 36). Se sono originati da una scansione, risultano del tutto inaccessibili (sono infatti immagini contenenti testo) e bisogna elaborare il file con software OCR (Optical Character Recognition) che permettono di estrarre/interpretare il testo contenuto nell'immagine.
Sono software per il riconoscimento ottico dei caratteri: producono un testo digitale modificabile con un normale editor a partire da un'immagine. Questi sistemi hanno raggiunto un grado di accuratezza eccellente quando si tratta di elaborare un testo molto semplice in formato .jpg o .gif, ma la maggior parte di essi non è in grado di tradurre una formula, soprattutto se bidimensionale, in un formato digitale. L'unico OCR disponibile in grado di interpretare in modo abbastanza soddisfacente le formule è il software Infty.

– Infty
  Sviluppato in Giappone, Infty è un software in grado di elaborare file in formato immagine (.jpg, .png e .gif) o in formato .pdf e di produrre documenti in cui le formule vengono scritte in linguaggio TeX o MathML. Purtroppo il riconoscimento delle formule non è privo di errori e la procedura di acquisizione non è completamente automatizzata, ma necessita di una revisione. Inoltre è stato sviluppato solo per il riconoscimento di testi in lingua giapponese o inglese.

– BlindMath
  Il linguaggio TeX, citato più volte, è un linguaggio di marcatura per la scrittura di formule molto diffuso in ambito universitario. Viene ben interpretato e letto da screen reader e barre Braille ma richiede da parte della persona che lo utilizza la conoscenza del linguaggio. A questo scopo il Centro Sinapsi dell'Università di Napoli ha sviluppato il software BlindMath che facilita la scrittura e la lettura di formule basate sul linguaggio TeX.

– Lambda
  Il progetto Lambda (Linear Access to Mathematics for Braille Device and Audio-synthesis) ha sviluppato un sistema che facilita la lettura, scrittura e l'elaborazione di testo ed espressioni matematiche, usando la sintesi vocale o la barra Braille. Ha la sua specifica codifica Braille ed un editor matematico multimodale progettato specificamente per rappresentare il codice lambda. Il sistema è molto efficiente, ma presenta il grave svantaggio di costringere gli utilizzatori ad imparare un nuovo codice matematico basato su una rappresentazione Braille ad otto punti.

– Axessibility
  Tiziana Armano, Anna Capietto e Nadir Murru del Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino hanno individuato e sviluppato una nuova tecnologia per favorire la partecipazione attiva agli studi anche universitari (che utilizzano formule matematiche lunghe e "non semplici") da parte di studenti non vedenti, nell'ottica dell'accessibilità universale e dell'inclusione scolastica [2]: il pacchetto LaTex axessibility.sty permette di creare documenti .pdf in cui le formule vengono lette dalle tecnologie assistive. Vengono generati automaticamente dei commenti nascosti nel documento pdf (mediante l'attributo /ActualText) in corrispondenza di ogni formula; tale testo alternativo risulta nascosto nel documento .pdf, ma gli screen reader Jaws, NVDA e VoiceOver vi accedono correttamente. Inoltre, sono stati creati dei dizionari (in inglese e italiano) per NVDA e Jaws che forniscono la lettura delle formule in linguaggio naturale nel caso in cui l'utente non conosca i comandi LaTex.

Alle macchine matematiche, che saranno centrali nella progettazione del Capitolo 3, è riservata la prossima sezione.

1.7 Macchine matematiche come mezzi semiotici di oggettivazione

È possibile studiare le macchine matematiche come mezzi semiotici di oggettivazione: il sapere incorporato da questi strumenti, attraverso lo stimolo fornito dall'alunno non vedente, può emergere ed essere esplicitato attraverso il linguaggio e la gestualità, per essere poi interiorizzato dall'allievo stesso.

1.7.1 L'uso di un artefatto

Seguendo [5], distinguiamo i prodotti esterni dell'attività collettiva umana in:

- artefatti primari: strumenti tecnici che vengono orientati verso l'esterno, direttamente usati per scopi intenzionali. Un esempio di artefatto primario è il compasso, o, più in generale, una macchina matematica.

- artefatti secondari: strumento psicologico orientato verso l'interno e usato nel mantenimento e nella trasmissione di specifiche competenze tecniche acquisite. Esempi di artefatti secondari sono la scrittura e le tecniche di calcolo.

- artefatti terziari: sono le teorie matematiche che organizzano i modelli matematici.

La transizione da artefatto primario a terziario attraverso l'uso del secondario è l'obiettivo che si prefigge l'insegnante.
All'interno dell'artefatto, o dello strumento, vi è racchiuso un sapere matematico: l'uso di tale strumento può evocare tali saperi nell'utilizzatore. Sta all'insegnante il compito di progettare delle situazioni didattiche in cui avviene la transizione dei significati matematici dall'artefatto all'utilizzatore: lo strumento deve essere un mediatore semiotico, deve diventare "trasparente" rispetto al sapere matematico.

> «Secondo le teorie di Vygotskij, la mediazione semiotica ipotizza un legame tra la classe degli strumenti, usati per risolvere problemi pratici, e la classe di quei costrutti mentali, chiamati segni o strumenti psicologici, che in alcuni casi hanno fornito la base potenziale alla sistemazione matematica» (Mariotti, [17, p. 4]).

Gli artefatti primari che si propongono all'interno di una situazione di apprendimento hanno una caratteristica molto importante: sono dotati di polisemia (cioè hanno un doppio legame semiotico). Sono collegati ad una specifica conoscenza matematica, e forniscono i mezzi di soluzione adatti all'utilizzatore per raggiungere un compito specifico. Si tratta di mettere l'allievo in condizioni di sfruttare il sistema di relazioni tra artefatto, compito e sapere matematico. Il ruolo dell'insegnate è fondamentale: oltre a programmare l'attività con lo strumento, deve agire in classe come mediatore culturale, utilizzando l'artefatto come strumento per mediare i contenuti matematici. Il ruolo delle macchine è quello di fungere da catalizzatore, che conduce alla produzione individuale e condivisa di segni, e che porti gli allievi a farne soggetto di una discussione matematica che sia utile a tutti.

1.7.2 Il ciclo didattico

Il ciclo didattico proposto da Bartolini Bussi e Maschietto in [5] e rappresentato in Figura 1.15) è un modello di sequenze didattiche che sfrutta in modo ottimale le potenzialità intrinseche di un artefatto. Nel ciclo didattico proposto, gli allievi vengono innanzitutto messi a confronto con un artefatto primario attraverso un compito, poi iniziano a produrre segni specifici in relazione all'uso di tale strumento. Questa attività avviene preferibilmente in gruppo, per promuovere lo scambio di opinioni e rendere l'esperienza sociale. In seguito gli alunni passano ad un processo di interiorizzazione cognitiva, lavorando sulla produzione individuale di segni, produzioni scritte del funzionamento dell'artefatto e rappresentazioni grafiche. Il ciclo didattico si chiude con una discussione collettiva tra pari: è necessario che gli allievi confronti-no le proprie produzioni di segni per sviluppare una produzione collettiva di segni.

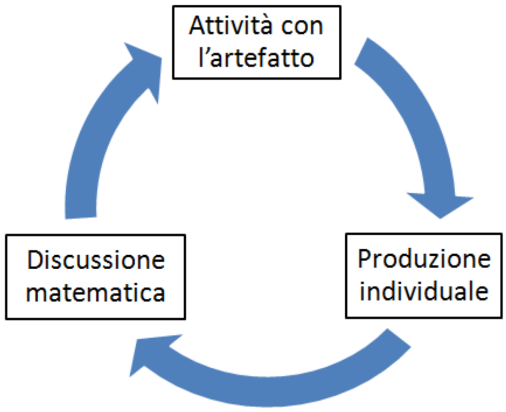


Figura 1.15: Ciclo didattico.

La discussione matematica collettiva è fondamentale per il processo di insegnamento-apprendimento e rappresenta il nucleo fondamentale del processo semiotico: viene definita come una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.) che costituisce un motivo dell'attività di insegnamento-apprendimento. All'interno di queste voci ci deve essere anche quella dell'insegnante, che si fa rappresentante della cultura matematica. Metaforicamente l'insegnante durante la discussione matematica è mediatore e come un direttore d'orchestra dirige un coro di voci che si fondono per produrre un'unica musica. Possiamo immaginare la classe come un'orchestra, al suo interno vi sono strumenti con timbriche diverse, solisti e strumenti che si limitino ad accompagnare, ma ognuno di essi contribuisce in modo fondamentale alla riuscita di un'unica sinfonia.

1.7.3 Macchine matematiche e non vedenti

Le macchine matematiche sono strumenti per tracciare curve e realizzare trasformazioni. Sono ad alta manipolabilità (realizzati in legno, metallo e plastica e mossi direttamente dalle mani): richiedono un intervento diretto

del corpo, molto più significativo rispetto a quello richiesto dagli strumenti "virtuali", simulati per mezzo dei PC.
Una ricerca, avviata nel 2006 dalle professoresse Maria Bartolini Bussi e Michaela Maschietto dell'Università di Modena, conferma i vantaggi delle macchine matematiche usate sia da studenti normodotati che da giovani disabili visivi, per la costruzione di conoscenze e competenze geometriche. Proprio nell'ottica di trovare strategie per migliorare l'insegnamento della geometria ad alunni vedenti, si è cercato di sfruttare le modalità esplorative tipiche di chi è privo della vista, le peculiarità dell'esplorazione aptica e di rendere tangibile ciò che normalmente si guarda.
Nel 2005 sono state costruite alcune macchine matematiche adattate ai non vedenti, nell'ambito di un progetto finanziato dall'Ufficio Scolastico Regionale dell'Emilia Romagna in collaborazione con l'l'Istituto per Ciechi G. Garibaldi di Reggio Emilia ed esposte presso lo stesso istituto. Le modifiche degli strumenti sono: sostituzione dei disegni sulla tavola con guide incise per l'esplorazione tattile e l'introduzione di corde e tavole in legno che consentono l'esplorazione tattile di modelli fisici di raggi luminosi e di piani in movimento. Le scelte tecniche sono state realizzate in collaborazione con la dott. Loredana Piccolo, tiflologa dell'Istituto reggiano.
Le Figure 1.16 e 1.17 mostrano l'adattamento di una macchina matematica per gli studenti non vedenti: la Figura 1.16 rappresenta il modello originale del parabologafo di Cavalieri, in cui la parabola è disegnata sulla tavola di legno, mentre la Figura 1.17 riporta il modello adattato, dove la curva è incisa sul piano.

Le potenzialità delle macchine matematiche ai fini della diffusione della cultura scientifica sono ormai riconosciute. Tra le caratteristiche più interessanti delle macchine matematiche c'è, come visto, la manipolazione diretta. Ciò ha suggerito la possibilità di usarle con studenti con minorazioni visive, giacché la *geometria attiva* rappresenta un nucleo fondante dei metodi promossi per favorire l'integrazione dei non vedenti.
Il diverso approccio didattico realizzato con le macchine matematiche si può

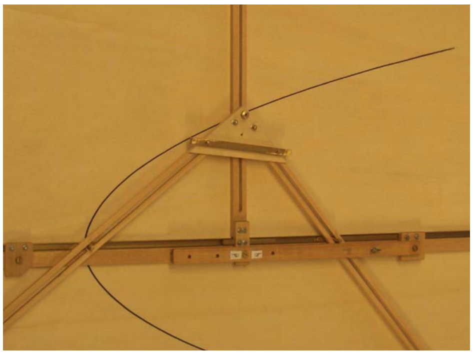


Figura 1.16: Parabolografo di Cavalieri.

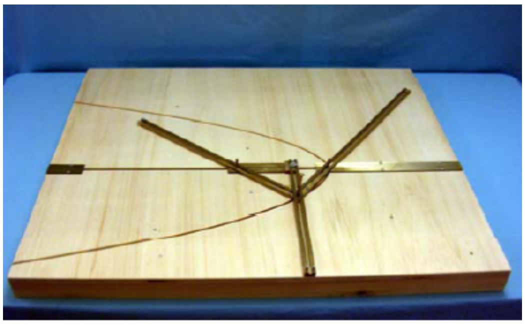


Figura 1.17: Parabolografo di Cavalieri adattato.

applicare con successo anche alla didattica normale (si veda, ad esempio, [5]). Dunque l'uso di queste macchine nella scuola potrebbe costituire un laboratorio di integrazione per non vedenti, in cui anche i vedenti hanno risorse aggiuntive e più stimolanti rispetto ai soli lavagna e gesso. La possibilità di manipolare fisicamente oggetti, come per esempio le macchine che generano curve, induce spesso modalità di esplorazione e di costruzione di significato differenti, ma altrettanto interessanti e, sotto certi aspetti, più ricche.
Il Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena è un centro di ricerca sulla didattica della matematica con l'uso di strumenti. Il laboratorio è collocato presso il Dipartimento di Matematica pura ed Applicata dell'Università (via G. Campi 213/b, 41125, Modena) mentre l'officina di costruzione e una mostra permanente sono collocate in un altro stabile (via Tito Livio 1, 41123, Modena) e affidate dall'Università all'Associazione Macchine Matematiche. Nelle due sedi sono collocati oltre duecento modelli di macchine matematiche, la maggior parte delle quali costruite dall'Associazione, divise in due grandi categorie, quella delle macchine geometriche (strumento che costringe un punto a muoversi o ad essere trasformato) e quella delle macchine aritmetiche (strumento che consente di contare e ordinare).
Tra le macchine per la geometria possiamo distinguere:

- i curvigrafi, strumenti che permettono di tracciare curve (ad esempio compassi, ellissografi, parabolografi, ecc.);

- i pantografi, che permettono di realizzare trasformazioni geometriche (tra cui i pantografi per traslazione, simmetria e stiramento);
- i prospettografi, che esemplificano l'interazione tra geometria proiettiva e ottica, consentendo di dare rappresentazioni concrete dell'infinito.

L'approccio di una macchina matematica per trasformazioni, è quello di una corrispondenza puntuale, nonostante la macchina metta in relazione due regioni di piano: ciò che interessa è la corrispondenza tra il punto direttore e il punto tracciatore. In ogni situazione c'è una corrispondenza tra il punto direttore e il punto tracciatore, dimostrabile per via geometrica, che dipende dai vincoli del sistema.

Capitolo 2

Macchine matematiche per le trasformazioni

Questo capitolo si apre con una trattazione delle trasformazioni geometriche in ottica didattica, in modo da essere fruibili sia per uno studente non vedente, sia per un docente di matematica di una scuola secondaria di secondo grado: gli argomenti trattati sono stati scelti in modo tale da abbracciare differenti curricola scolastici, in base alla percentuale di alunni con deficit visivo totale presenti nei Licei e Istituti (si veda Figura 1.2 a pagina 15).
Infatti, la ricerca didattica relativa a questa sezione si sarebbe dovuta effettuare durante il secondo semestre del corrente a.a. 2019/2020, in una terza Liceo Linguistico di Bologna, avente tra gli studenti un'alunna con deficit visivo totale: si sarebbe dovuto procedere alla creazione di un percorso mirato al consolidamento delle sue conoscenze pregresse, tenendo conto anche dell'indirizzo cui era iscritta. Tuttavia, a causa dell'emergenza Covid-19 e della conseguente chiusura di tutti gli edifici scolastici, l'intera attività è stata ridefinita da zero: non si sarebbe potuto più svolgere un laboratorio presso un indirizzo specifico e rivolto ad una precisa alunna; dunque si è pensato che sarebbe stato più utile una trattazione generica delle trasformazioni geometriche, adatta alla maggior parte degli indirizzi scolastici, nella speranza che questo lavoro possa essere di aiuto a molti studenti ed insegnanti ad un

primo studio sulle affinità, similitudini e isometrie.
Le Indicazioni Nazionali[7]ci suggeriscono di considerare gli obiettivi specifici dell'apprendimento del Liceo Artistico: questa scuola, infatti, oltre a possedere un'area geometrica del primo e secondo biennio molto sviluppata sulle trasformazioni geometriche (per ovvie ragioni tecnico-grafiche), permette agli studenti di creare e utilizzare opportuni strumenti per lo studio delle discipline artistiche e matematiche. Riportiamone alcune righe:

> «Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti.» ... «La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea) e sia mediante programmi informatici di geometria.» ... «Le sezioni coniche saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico.» ... «Lo studente apprenderà i fondamenti matematici della prospettiva e approfondirà le relazioni tra le conoscenze acquisite in ambito geometrico e le problematiche di rappresentazione figurativa e artistica.»

La trattazione degli argomenti appare varia e adatta al nostro caso: cercheremo di basare lo studio delle trasformazioni geometriche considerando un percorso molto simile a quello proposto nei Licei Artistici, adattando tutti i supporti in uso alle esigenze degli studenti non vedenti (sarà certamente solo un'ispirazione, poiché è alquanto improbabile che un alunno cieco intraprendi studi artistici).

[7] `http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf`
Le "Indicazioni Nazionali" sono un testo di riferimento unico per tutte le scuole autonome, che sostituisce quelli che, un tempo, si chiamavano "programmi ministeriali".

In particolare, dalle Indicazioni Nazionali appena riportate, possiamo estrapolare il seguente percorso didattico per uno studente con disabilità visiva al secondo biennio di un Liceo: esposizione delle principali trasformazioni affini (da un punto di vista sia sintetico e sia analitico), presentazione dei pantografi (attraverso cui poter adattare le esempi fatti in classe e basati sulla sola percezione visiva), possibile attività con una particolare macchina matematica (pantografo per lo stiramento) e primi elementi di prospettiva.

Le macchine meccaniche presentate in questa sezione sono i pantografi, che descrivono le più semplici trasformazioni lineari piane (per cui si consiglia un ripasso delle principali definizioni e osservazioni in Appendice B), e la genesi spaziale dello stiramento, molto utile per lo studente non vedente in quanto permette di individuare tattilmente le ombre solari. I modelli descritti in [24] sono i curvigrafi: la principale differenza strutturale tra i curvigrafi e i pantografi sta nel fatto che questi ultimi sono rappresentati da un puntatore e un tracciatore, entrambi con due gradi di libertà (cioè mettono in relazioni due regioni del piano), mentre i primi hanno un solo grado di libertà, cioè la configurazione assunta nel tempo può essere descritta con un solo parametro e se questo è assegnato in funzione del tempo, i punti del sistema articolato disegnano una curva algebrica.

I contenuti di questo capitolo sono trattati ed ispirati da [5, 9, 21].

2.1 Trasformazioni affini

Il primo esempio di trasformazione affine presentato da molti docenti di matematica in aula, spesso accompagnato da un disegno schematico alla lavagna, è l'ombra solare. Descriviamolo brevemente.
Un cartellone pubblicitario o il telaio di una finestra, illuminati dal Sole, tracciano sul terreno ombre nitide, dalle quali è possibile osservare e studiare importanti proprietà matematiche. Risulta utilissimo, a questo proposito, un telaio quadrato diviso in quadratini uguali (vedi Figura 2.1).

Il telaio è esposto al Sole per tutto il giorno e l'ombra si modifica nel corso della giornata, ma sembra avere sempre le stesse caratteristiche: l'ombra del telaio quadrato è un parallelogramma.
Infatti, il Sole è talmente distante dalla Terra che i suoi raggi si possono considerare paralleli; questi, sfiorano le sbarrette e formano dei piani di luce paralleli che tracciano sul tavolo delle ombre parallele. Si può dire che i raggi del Sole trasformano il telaio nella sua ombra, mantenendo il parallelismo: una trasformazione che mantiene il parallelismo prende il nome di trasformazione affine o affinità.
A partire dalla proprietà caratterizzante, se ne possono ricavare altre, anch'esse osservabili con le ombre solari, come ad esempio:

- a rette corrispondono rette;
- il rapporto fra le aree delle figure corrispondenti;
- il rapporto fra segmenti corrispondenti solo se i segmenti si trovano sulla stessa retta o su rette parallele.

La prima proprietà sembra evidente, ma è molto importante: i tratti rettilinei, come i lati del telaio, non appaiono incurvati nell'ombra.
Si rimandano le dimostrazioni di tali proprietà a [9].
Se si sottopone il telaio ad un'altra trasformazione che non è affine, come ad esempio se lo si illumina non più con i raggi del Sole ma con un proiettore (Figura 2.2), l'ombra non è più un parallelogramma ma un quadrilatero qualunque. Viene meno l'invariante caratteristico dell'affinità: il parallelismo. Dunque la trasformazione non è affine: prende il nome di trasformazione proiettiva o proiettività.
Non mantenendosi il parallelismo, in una proiettività non si mantiene né il rapporto tra aree, né il rapporto tra segmenti: l'unica proprietà che rimane è che a rette corrispondono rette.
È interessante osservare che se il proiettore viene allontanato dal telaio, il quadrilatero ombra tende ad assumere la forma di un parallelogramma: si può co-

sì intuire che un'affinità è una particolare proiettività, ottenuta considerando la sorgente di luce infinitamente lontana.

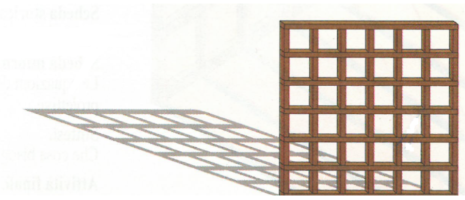


Figura 2.1: Telaio quadrettato esposto al Sole. Immagine presa da [9].

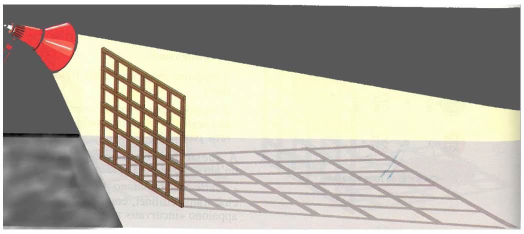


Figura 2.2: Telaio quadrettato esposto ad un proiettore. Immagine presa da [9].

Ci chiediamo come sia possibile adattare questo esempio delle ombre solari alle esigenze di uno studente non vedente. La risposta è semplice e logica: bisogna cambiare esempio. Il cieco totale, che non ha mai visto, e tutt'ora non vede, lo spazio e gli oggetti che lo circondano, non sa neppure che cosa sia un'ombra solare. Per fargli comprendere il significato di trasformazione affine si può utilizzare un materiale elastico, facilmente trasportabile e non ingombrante (si veda Sezione 1.5.2).

2.1.1 Equazioni di una trasformazione affine

Pensiamo ad una persona ferma davanti al Sole al tramonto: si osserva che l'ombra diventa sempre più lunga man mano che il Sole si abbassa all'orizzonte. È come se l'ombra fosse una elastico che viene tirato.
L'idea dell'elastico appare efficiente anche per la didattica inclusiva dei non vedenti. Il materiale di cui abbiamo bisogno è: palloncini, gomma eva, matita e scotch. Tagliamo una parte sufficientemente grande di palloncino e fissiamola con lo scotch sulla gomma eva: disegniamo una figura sul palloncino, esercitando una pressione abbastanza forte sull'elastico in modo da inciderlo ma non bucarlo. L'alunno non vedente potrà studiare tutta la superficie utilizzando il senso tattile, così da riconoscere facilmente l'increspatura della

tela elastica relativa all'immagine geometrica disegnata. Ora stacchiamo lo scotch dalla gomma eva e tiriamo tutta la superficie elastica in una direzione: la figura subisce una trasformazione che sembra un'affinità, pur essendo lontana dalla trasformazione data dai raggi del Sole (Figura 2.3). Per verificare che si tratta effettivamente di una trasformazione affine basta verificare la proprietà caratteristica di un'affinità: rette parallele si trasformano in rette parallele.
Quindi tracciamo sul palloncino due rette parallele r e s, che attraversano la superficie elastica in tanti punti, come ad esempio R e S (vedi Figura 2.4). Tiriamo il palloncino nella direzione $\overrightarrow{RS}$: si ottengono due rette r' e s' che sono ancora parallele.
Se si dilata una figura nella direzione $\overrightarrow{RS}$, non può mai accadere che R e S vadano a coincidere.
Inoltre si osserva anche che, con lo stiramento, i segmenti vanno in segmenti e, più in generale, le rette vanno in rette.
Dunque rette parallele si trasformano in rette parallele: la trasformazione che si ottiene dilatando una tela elastica è un'affinità.

L'utilizzo di questi espedienti tattili per l'argomento geometrico delle trasformazioni risulta efficace anche per i normo dotati: iniziando la spiegazione con questa metodologia si avrà il duplice scopo di attirare l'attenzione dell'alunno, che sarà personalmente coinvolto nell'attività didattica, e di esercitare la facoltà di analisi, che permetterà di analizzare in un oggetto "complesso" tutti gli elementi che lo formano. In questo caso la didattica speciale per i non vedenti si può pensare come un potenziamento della didattica generale: l'esperienza fatta con il palloncino porta a descrivere una trasformazione affine per mezzo di equazioni. Possiamo procedere in questo modo.
Si disegni sul palloncino un riferimento cartesiano Oxy e si fissi l'attenzione su un punto del piano, ad esempio $A = (2, 3)$; si prenda un foglio di plastica trasparente con i buchi e lo si adagi sulla tela elastica ricopiando il riferimento iniziale e indicandolo con $Ox'y'$. Così inizialmente si ha il foglio trasparente perfettamente sovrapposto al piano elastico ed il punto A ha le

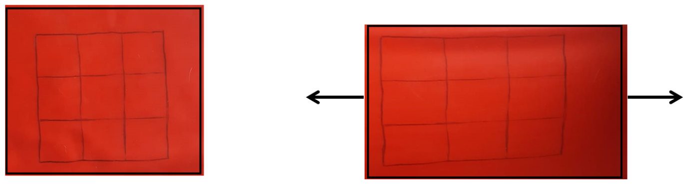


Figura 2.3: Una figura disegnata su una tela elastica viene allungata.

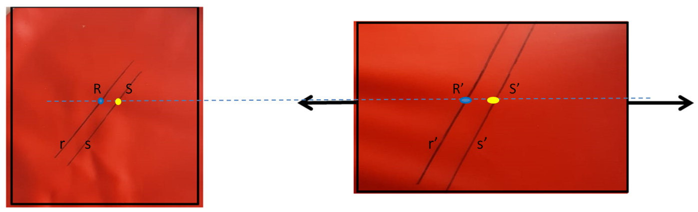


Figura 2.4: La trasformazione ottenuta dilatando una tela elastica è un'affinità.

stesse coordinate nel riferimento $Ox'y'$. Viene quindi dilatato il palloncino nella direzione dell'asse x fino a renderne la lunghezza m-volte ($m > 1$) più grande rispetto a quella iniziale: il piano si è trasformato e la scala sull'asse delle x risulta dilatata. Si intuisce che sono cambiate le coordinate di A rispetto al riferimento Oxy: qualunque punto A di coordinate

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

si trasforma in seguito allo stiramento dell'asse x, nel punto A' di coordinate

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = y. \end{cases}$$

Se invece si opera uno stiramento lungo l'asse delle y, le ascisse di tutti i punti rimangono inalterate, mentre le ordinate risultano moltiplicate per un intero $n > 1$. Perciò un qualunque punto punto A di coordinate (x, y) si trasforma in un punto $A' = (x', y')$ di coordinate

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ny. \end{cases}$$

Infine se si operano contemporaneamente uno stiramento lungo l'asse delle x e uno lungo l'asse delle y, un punto $A = (x, y)$ si trasforma in $A' = (x', y')$ che ha le coordinate date da

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases} \tag{2.1}$$

dove m, n sono numeri reali più grandi di 1.
Se si disegna il riferimento sul palloncino già dilatato lungo entrambi gli assi cartesiani, quando si allenta la tensione il piano si restringe, come se fosse stato compresso lungo i due assi. A questa esperienza corrisponde il fatto che nelle Equazioni (2.1) i coefficienti m, n hanno valori più piccoli di 1 ma comunque positivi.
Le Equazioni (2.1) sono le equazioni che descrivono una trasformazione affine, dove m, n indicano due qualunque numeri reali positivi.
Se in (2.1) $m = n$, allora i due stiramenti, in direzione dell'asse x e dell'asse y, sono prodotti da "forze uguali". Questo porta al fatto che la figura non cambia di forma: si ottiene una figura simile. Si può quindi descrivere la similitudine come la relazione associata a particolari affinità, descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = my. \end{cases} \tag{2.2}$$

Spesso al posto di similitudine si usa il termine omotetita per indicare la particolare trasformazione geometrica del piano o dello spazio che dilata o contrae un oggetto, mantenendo invariati i suoi angoli (ossia la sua forma).

2.1.2 Isometrie

Le trasformazioni descritte dalle Equazioni (2.1) considerano i coefficienti m, n sempre positivi. Abbandonando il modello del palloncino elastico, si può vedere cosa succede se questi due numeri non sono più positivi:

- se $m = -1$ e $n = 1$, le Equazioni (2.1) diventano quelle della simmetria rispetto all'asse y.
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y. \end{cases} \tag{2.3}$$
Si tratta di una trasformazione che lascia inalterati tutti i punti che si trovano sull'asse delle ordinate;

- se $m = 1$ e $n = -1$, le Equazioni (2.1) diventano quelle della simmetria rispetto all'asse x.
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y. \end{cases} \tag{2.4}$$
Si tratta di una trasformazione che lascia inalterati tutti i punti che si trovano sull'asse delle ascisse;

- se $m = -1$ e $n = -1$, le Equazioni (2.1) diventano quelle della simmetria rispetto all'origine O.
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y. \end{cases} \tag{2.5}$$
Si tratta di una trasformazione in cui l'unico punto che rimane fermo è l'origine O.

Quando si opera una simmetria, si ritrova ciò che avevamo detto a inizio Sezione 2.1.1: non si può più pensare alle figure disegnate sulla tela elastica, visto che non cambia la forma delle figure ma solo la loro posizione nel piano. Proprio per questo le simmetrie prendono anche il nome di isometrie, termine che riunisce tutte le trasformazioni del piano che si limitano a cambiare

posizione delle figure, lasciandone immutate forma e dimensioni.
Tuttavia le simmetrie non sono le uniche trasformazioni che compongono le isometrie; ci sono anche le traslazioni e le rotazioni.
Ogni rotazione nel piano è definita a partire da O, detto centro di rotazione, e da un angolo α caratterizzato da un'ampiezza e da un verso, che può essere orario o antiorario. Si dice rotazione di centro O e angolo α la trasformazione geometrica che ad ogni punto P del piano associa il punto P' tale che:

- i segmenti OP e OP' abbiano la stessa lunghezza;

- gli angoli α e $P\hat{O}P'$ abbiano lo stesso verso (orario o antiorario) e la stessa ampiezza.

Esiste già uno studio approfondito riguardo le rotazioni spiegate tramite strumenti tiflodidattici, pertanto si rimanda tale trattazione in [12].
Per quanto riguarda le traslazioni invece, la realtà ci suggerisce varie trasformazioni che modificano la posizione di una figura, lasciandone inalterate forma e dimensioni. Ad esempio un adesivo attaccato sul vetro laterale di un'automobile, quando il vetro sale o scende, cambia solo la posizione (Figura 2.5). Si tratta di una traslazione: tutti i punti del finestrino percorrono la stessa distanza, muovendosi nella stessa direzione e nello stesso verso. Le traslazioni sono delle particolari isometrie, dato che le figure, come l'adesivo, cambiano solo la loro posizione.
Un modello adatto a descrivere le traslazioni può essere ancora una volta un supporto concreto per non vedenti: si disegna il riferimento cartesiano Oxy su un foglio di plastica trasparente e un riferimento $Ox'y'$ su un foglio fissato sulla gomma eva (così entrambi i sistemi saranno individuabili sia alla vista e sia al tatto). Il foglio di plastica può traslare scivolando: questo permette di confrontare la situazione iniziale con quella finale (Figura 2.6).

In Figura 2.6 il foglio trasparente è stato traslato di 3 unità nella direzione dell'asse y, verso l'alto. Così un qualunque punto A del piano in gomma con

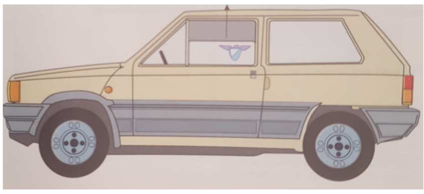


Figura 2.5: Traslazione dell'adesivo (cambia solo la posizione).

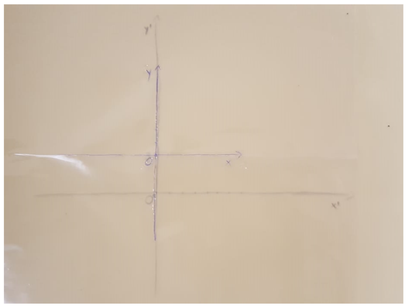


Figura 2.6: Traslazione dell'origine O eseguita con i supporti per non vedenti.

coordinate iniziali

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

dopo la traslazione mantiene la stessa ascissa ma aggiunge 3 all'ordinata, questo vuol dire che A è stato portato in A' che ha coordinate (x', y') date da

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + 3. \end{cases}$$

In particolare questa traslazione porta l'origine O' in $O = (0, 3)$.
Generalizzando questo esempio, si può dire che una traslazione lungo l'asse delle x che porta l'origine O' nel punto $O = (p, 0)$ è descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y \end{cases}$$

dove p può assumere qualunque valore reale.
Si può ragionare in modo analogo per descrivere una traslazione lungo l'asse delle y verso il basso e lungo l'asse delle x verso destra e sinistra.
Una traslazione lungo l'asse delle y che porta l'origine O' nel punto $O = (0, q)$

è descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + q \end{cases}$$

dove q può assumere qualunque valore reale.
Le due traslazioni lungo gli assi possono essere composte, cioè effettuate una dopo l'altra; in questo caso l'origine O' si porta in $O = (p, q)$ e le coordinate di tutti i punti vengono modificate aggiungendo p all'ascissa e q all'ordinata. Un qualunque punto $A = (x, y)$ viene portato in un punto $A' = (x', y')$ le cui coordinate sono date da:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases} \tag{2.6}$$

dove p, q possono assumere qualunque valore reale.
Finora abbiamo utilizzato i sussidi per non vedenti nella spiegazione analitica di alcune trasformazioni affini. Per una comprensione più profonda dell'argomento, è utile affiancare al punto di vista analitico anche quello sintetico, sottolineando la distinzione delle trasformazioni tramite invarianti geometrici. Inoltre questo era anche uno degli obiettivi specifici dell'apprendimento individuato dalle Indicazioni Nazionali ad inizio capitolo. Degli strumenti efficaci per questo scopo sono le macchine matematiche, ovviamente da adattare alle esigenze dello studente con minorazione visiva.
Utilizzando questi strumenti nello studio delle trasformazioni geometriche, lo studente non vedente riuscirà non solo a comprendere meglio le affinità (già analizzate con l'esperienza dei palloncini e dei fogli trasparenti), ma anche ad avvicinarsi al mondo della prospettiva (ad esempio, con la manipolazione della genesi tridimensionale dello stiramento). Così come per le ombre solari, anche per le proiezioni prospettiche l'alunno cieco avrà difficoltà ad accettarne l'esistenza, senza averne mai fatto esperienza: una proposta in merito, è proprio quella di utilizzare alcune particolari macchine matematiche.

2.2 Macchine matematiche per le affinità

Un sistema articolato è un meccanismo in cui sono presenti solo aste rigide che possono ruotare intorno a perni che le uniscono o scorrere lungo guide rettilinee (vedi Figura 2.7).
Anche le macchine matematiche sono oggetti fisici da manipolare concretamente, ma al contrario dei sistemi articolati possono presentare una struttura più complessa, in cui sono presenti elementi di altra natura rispetto alle semplici aste, come i fili e i pesetti. Molto spesso una macchina matematica è composta da più sistemi articolati semplici connessi tra loro (vedi Figura 2.8).

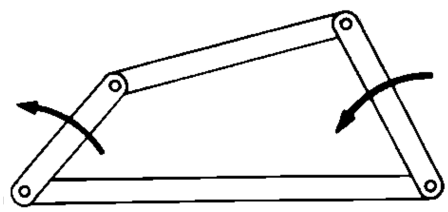


Figura 2.7: Quadrilatero articolato.

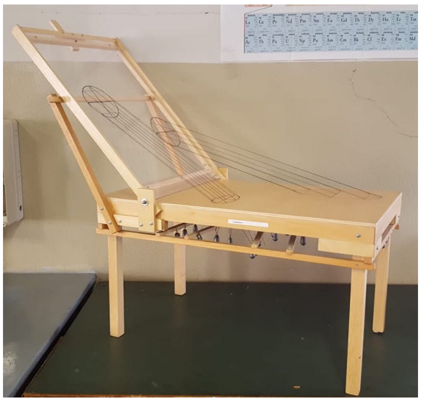


Figura 2.8: Macchina matematica per lo stiramento.

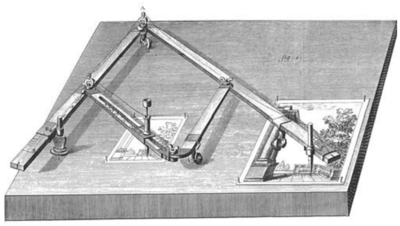
Le macchine matematiche possono essere di due tipi: le macchine per l'aritmetica, cioè strumenti che consentono di effettuare operazioni aritmetiche (come ad esempio le calcolatrici meccaniche e gli abaci) e le macchine per la geometria, cioè strumenti che forzano un punto o una figura a muoversi o a essere trasformati secondo leggi matematiche prestabilite.
Le macchine matematiche per la geometria si dividono in curvigrafi, prospettografi e pantografi.

Nella sezione seguente, ci occuperemo dello studio diretto di alcune trasformazione geometriche attraverso l'uso delle macchine matematiche.

È consigliato un ripasso sulle principali definizioni (punto di vista sintetico) ed osservazioni presenti in Appendice B.

2.2.1 Macchina matematica per l'omotetia

Christopher Scheiner (1575-1650) utilizzò per la prima volta un pantografo per riprodurre in scala disegni tracciati su un foglio (riduzione o ingrandimento). Tale uso è documentato in una famosa tavola (Figura 2.9) dell'Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers (1751-1780).



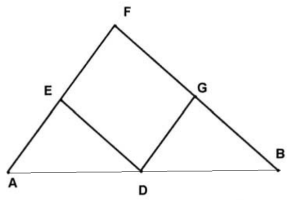


Figura 2.9: Disegno sulla tavola dell'Encyclopédie des sciences e immagine virtuale del pantografo di Scheiner.

Questo strumento realizza riduzioni o ingrandimenti e può essere utilizzato al posto del palloncino in gomma per la spiegazione delle omotetie dirette (Sezione 2.1.1): se il punto direttore è quello di sinistra (punto D in Figura 2.9) e il punto tracciatore è quello di destra (punto B in Figura 2.9) si ha un ingrandimento, se le funzioni sono scambiate si ha una riduzione.

Proposizione 2.1 (Omotetia). *È dato il sistema $AEFGDB$ tale che:*

l'asta AF contiene il punto E;

l'asta FB contiene il punto G;

i punti A, D, B sono allineati;

AF è parallelo a DG,

FB è parallelo a ED.

AF e FB sono congruenti.

Sia inoltre A fissato nel piano.
Qualunque sia la configurazione delle aste, i punti D, B si corrispondono in un'omotetia di centro A e rapporto $\frac{AE}{AF}$.

Dimostrazione. Consideriamo la configurazione in Figura 2.9 dove i punti A, D, B sono allineati: i triangoli AED e AFB sono simili perché hanno i tre angoli congruenti a coppie (sono formati da rette parallele). Segue che le coppie di lati corrispondenti sono proporzionali:

$$AE : AF = ED : FB.$$

Analogamente per i triangoli AFB e DGB si ha:

$$DG : AF = GB : FB.$$

Se ora deformiamo il pantografo, $EFGD$ resta un parallelogramma (articolato).
Nella nuova configurazione i triangoli AED e AFB sono simili perché hanno congruenti gli angoli in E e F e hanno in proporzione le coppie dei lati adiacenti. Segue che gli angoli $E\hat{A}D$ e $F\hat{A}B$ sono congruenti e quindi che A, D, B sono allineati.
Dunque A, D, B sono allineati in tutte le configurazioni assunte dal pantografo.
I triangoli AED e AFB sono simili in ogni configurazione: segue che qualunque sia la posizione del punto D si ha che

$$AD : AB = AE : AF = costante$$

con A, D, B allineati.
In base alla Definizione B.10, la funzione $D \to B$ è un'omotetia di centro A rapporto $\frac{AE}{AF}$. □

2.2.2 Macchine matematiche per le isometrie

Nel seguito saranno illustrati separatamente gli strumenti che realizzano localmente le trasformazioni di traslazione, simmetria centrale, rotazione e simmetria assiale

Proposizione 2.2 (**Traslazione**). *$ABCD$ e $CDPQ$ sono due parallelogrammi articolati aventi il lato CD in comune. Il lato AB del primo è fissato al piano del modello. I punti P e Q hanno due gradi di libertà. La macchina realizza una funzione dal piano al piano*

$$P \to Q.$$

Si tratta di una traslazione individuata in modulo, direzione e verso dal vettore AB.

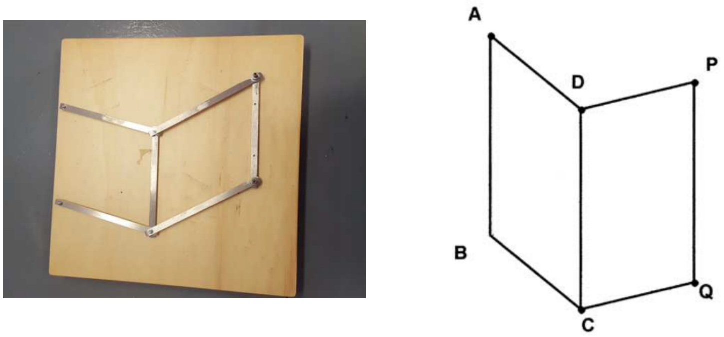


Figura 2.10: Fotografia e immagine virtuale del pantografo per traslazione.

Dimostrazione. Dalla Figura 2.10 si evince che la proprietà esposta nel Proposizione è una conseguenza immediata delle proprietà dei parallelogrammi:

$$PQ = DC = AB, \qquad PQ /\!/ DC /\!/ AB.$$

Per cui la Definizione B.6 ci porta a concludere la dimostrazione. □

Proposizione 2.3 (**Simmetria centrale**). *$ABCP$ è un rombo articolato, il lato AB è imperniato al piano del modello nel suo punto medio O. L'asta*

CB è prolungata di una lunghezza $BQ = CB$. I punti P e Q hanno due gradi di libertà. La macchina realizza una funzione dal piano al piano

$$P \to Q.$$

Si tratta di una simmetria centrale di centro O.

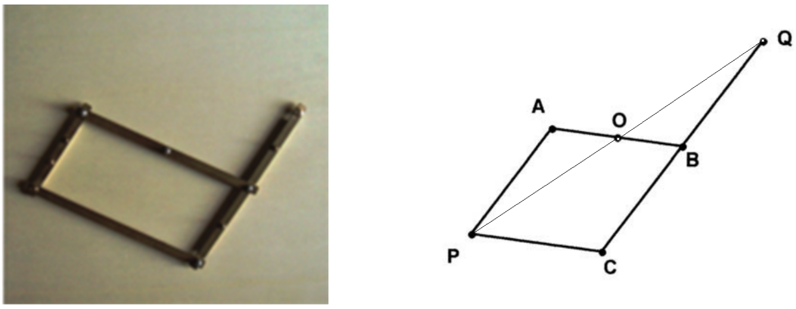


Figura 2.11: Fotografia e immagine virtuale del pantografo per simmetria centrale.

Dimostrazione. La proprietà si dimostra osservando la Figura 2.11 in cui i triangoli PAO e QBO sono congruenti per il primo criterio di congruenza: I lati AP e $CB = BQ$ sono congruenti tra loro, così come i lati AO e OB e gli angoli $P\hat{A}O$ e $O\hat{B}Q$. Quindi vale l'uguaglianza degli angoli $A\hat{O}P = B\hat{O}Q$ e dei lati $PO = QO$. Il punto O è il centro della trasformazione che ad ogni punto P associa un punto Q tale per cui O è il punto medio di PQ : questa è esattamente la definizione B.8 che conclude la dimostrazione. □

Il seguente sistema articolato è un po' più complesso. La sua invenzione si deve a Jeames Sylvester (1814-1897) che lo descrive in due articoli del 1875.

Proposizione 2.4 (**Rotazione**). *$OABC$ è un parallelogramma articolato, il vertice O è imperniato al piano del modello. Sui lati AB e CB sono costruiti due triangoli isosceli simili con i vertici in A e in C e con $AB \cong AP$ e $BC \cong CQ$. I punti P e Q hanno due gradi di libertà. La macchina realizza una funzione dal piano al piano*

$$P \to Q.$$

Si tratta di una rotazione di centro O e ampiezza $\alpha = P\hat{A}B = Q\hat{C}B$.

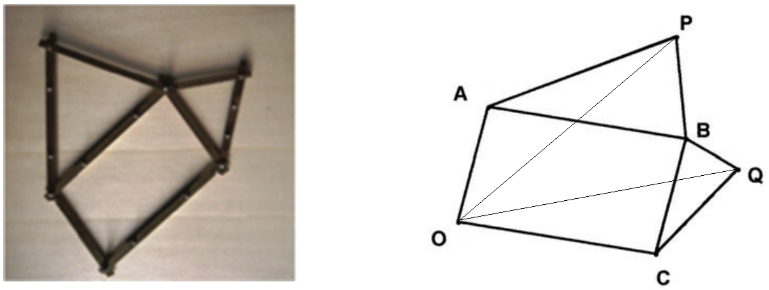


Figura 2.12: Fotografia e immagine virtuale del pantografo di Sylvester.

Dimostrazione. In riferimento alla Figura 2.12, la dimostrazione si può dividere in due parti:

1. $OP = OQ$.
   I triangoli OAP e OCQ sono congruenti (per il primo criterio di congruenza), dunque $OP = OQ$.

2. $P\hat{O}Q = P\hat{A}B = Q\hat{C}B = \alpha$.
   Infatti:

$$\begin{aligned} P\hat{O}Q &= A\hat{O}C - A\hat{O}P - C\hat{O}Q = A\hat{O}C - (A\hat{O}P + C\hat{O}Q) = \\ &= A\hat{O}C - (A\hat{O}P + A\hat{P}O) = A\hat{O}C - (\pi - O\hat{A}P) = \\ &= O\hat{A}P - (\pi - A\hat{O}C) = O\hat{A}P - O\hat{A}B = P\hat{A}B = Q\hat{C}B = \alpha. \end{aligned}$$

In base alla definizione B.7, questa trasformazione è una rotazione. □

Le ultime due macchine matematiche contengono perni che scorrono dentro delle linee rettilinee.

Proposizione 2.5 (**Simmetria assiale**). *$PBQC$ è un rombo articolato; i vertici B e C sono vincolati a scorrere nella scanalatura s. I vertici P e Q*

hanno in tal modo due gradi di libertà. La macchina realizza una funzione dal piano al piano

$$P \to Q.$$

Si tratta di una simmetria assiale di asse s.

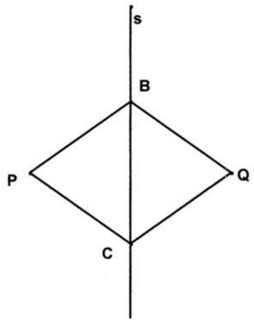


Figura 2.13: Fotografia e immagine virtuale del pantografo per simmetria assiale.

Dimostrazione. La Figura 2.13 rappresenta il sistema articolato per la simmetria assiale.
La dimostrazione è immediata perché le diagonali del rombo si dimezzano scambievolmente e si applica la Definizione B.9 □

2.2.3 Macchina matematica per lo stiramento

Proposizione 2.6 (**Omologia-stiramento**). *$PBQC$ è un rombo articolato di lato l. I punti M e N fissati rispettivamente sui lati PB e PC ad ugual distanza da P ($PM = PN = d$) sono vincolati a scorrere lungo la scanalatura rettilinea r. Questo sistema articolato ha due gradi di libertà. La macchina realizza una funzione dal piano al piano*

$$P \to Q.$$

Tale funzione è una particolare omologia affine (chiamata anche stiramento) con asse r e direzione ortogonale ad r.

Dimostrazione. In riferimento alla Figura 2.14, è facile dimostrare che la retta per PQ si mantiene (durante la deformazione del sistema) perpendicolare ad r e che risulta sempre costante il rapporto delle distanze di P e di Q da r. Dato che la retta per BC e la retta r sono parallele, si ha:

$$\begin{aligned} PH : PN &= HO : NC = PO : PC, \\ PH : PN &= (HO + PO) : (NC + PC), \\ PH : PN &= QH : (NC + PC), \\ \frac{QH}{PH} &= \frac{NC + PC}{PN}. \end{aligned}$$

Figura 2.14: Fotografia e immagine virtuale del pantografo per lo stiramento.

Quindi si ha:

$$\frac{QH}{PH} = \frac{2l - d}{d}.$$

Se si considera inoltre che le parti di piano messe in corrispondenza appartengono a semipiani opposti rispetto a r, la trasformazione realizzata dalla macchina è la particolare omologia affine dello stiramento (vedi Definizione B.11) di rapporto $k = \frac{2l-d}{d}$. □

2.2.4 L'ellisse con il pantografo per lo stiramento

Presentiamo ora una scheda di laboratorio adatta per un secondo biennio di una scuola secondaria di secondo grado e incentrata sull'uso del pantografo per lo stiramento. Non è stato possibile effettuare la sperimentazione in classe, quindi ne descriviamo solamente la progettazione e il suo adattamento alle esigenze di un alunno non vedente, in riferimento ai mezzi semiotici di oggettivazione presentati nella Sezione 1.6.2, a pagina 25.

Prerequisiti. È possibile presentare questo laboratorio solo in una classe che ha già analizzato e ripassato le trasformazioni affini, la circonferenza e l'ellisse: la seguente attività, infatti, è stata creata come esempio alternativo alla spiegazione "classica" della trasformazione affine per stiramento che si effettua con l'uso di tele elastiche (si veda pagina 47), inoltre offre un ottimo spunto per introdurre il discorso delle ombre solari, presentato a inizio capitolo.

Obiettivi. Applicazione della trasformazione affine per stiramento alla circonferenza. Trovare le equazioni dell'ellisse attraverso la trasformazione della circonferenza con l'uso del pantografo per lo stiramento. Consolidamento di quanto studiato in precedenza, relativamente alla circonferenza, all'ellisse e alle trasformazioni affini.

Durata. tre ore.

Ambiente e strumenti utilizzati. La sperimentazione è svolta in aula. La classe viene divisa in gruppi di massimo quattro componenti: a ciascun gruppo viene consegnato un pantografo per lo stiramento, con due mine all'interno dei puntatori, una puntina da disegno, una graffetta lunga 3 cm, diversi fogli quadrettati, matite e righe. Gli studenti non conoscono la macchina loro consegnata e devono scoprirne il funzionamento, attraverso una scheda guida di laboratorio appositamente creata.

Modalità di organizzazione. Partecipano tutti gli studenti presenti in aula. Per il gruppo con l'alunno non vedente, bisogna adattare il pantografo in esame attraverso opportuni sussidi didattici per i disabili visivi. Ad ogni gruppo viene consegnata una scheda cartacea divisa in tre parti (una ogni ora); al termine di ogni ora è necessario correggere la scheda guida in esame. I fogli contenenti le risposte alle domande già svolte possono essere sempre consultati, durante tutta l'attività.

Prima parte, domande $1-2-3$ *(familiarizzazione con la macchina).*
Le prime tre domande servono per prendere confidenza con la macchina matematica completamente sconosciuta agli studenti: si studia gradualmente il funzionamento dello strumento, partendo da una descrizione realistica delle sue parti meccaniche fino ad arrivare, facendo alcune prove grafiche, alla creazione di una lista di invarianti geometrici per trasformazione. Lo scopo è di far emergere l'invariante caratteristico dell'affinità: il parallelismo.

Seconda parte, domande $4-5-6$ *(individuazione della trasformazione).*
Agli studenti è richiesto di fare una serie di misurazioni di alcune componenti del pantografo in diverse configurazioni. Deve risultare che il rapporto tra le distanze delle punte scriventi dall'asse s è costante ($cost = k$). In base alle risposte date in precedenza e avvalendosi dei suggerimenti presenti in ogni domanda, gli alunni devono riconoscere che la trasformazione in studio è una particolare affinità: lo stiramento di rapporto k e asse coincidente con la scanalatura presente nella macchina. Devono quindi ricordare e trascrivere le giuste equazioni.

Terza parte, domande $7-8-9$ *(costruzione della figura trasformata con relative equazioni).*
Gli studenti devono riconoscere che la curva che si ottiene trasformando una circonferenza attraverso lo stiramento è un ellisse. Quindi seguendo le indicazioni dell'ultima domanda (in modo tale da avere in tutti i gruppi lo stesso riferimento ortogonale) si ottiene, dalle trasformazioni inverse dello stiramento (trovate nella seconda parte), l'equazione cartesiana dell'ellisse.

Riportiamo le nove domande che costituiscono la scheda guida del pantografo per lo stiramento:

1 Descrivi la macchina matematica in esame in modo tale che sia possibile costruirne una simile sulla sola base di questa descrizione.

- Da quante aste rigide è composto il sistema articolato?
- Quale figura geometrica formano tali aste?
- Dove e come si possono muovere queste aste (singolarmente, a coppia, occupano tutto il piano o sono costrette a stare in un posto preciso)?
- Hai a disposizione due mine: dove le inseriresti e perché proprio lì?

2 In quante direzioni possono muoversi le due mine? Per comodità chiama P (puntatore) la mina posta nella parte del piano con meno parti meccaniche, e P' (tracciatore) la mina che occupa la parte dove si sviluppa maggiormente la macchina matematica.

- Individua le parti del piano dentro cui si possono muovere P e P'. Siano queste rispettivamente A e A': sono equivalenti? Hanno punti in comune?
- Caratterizza la posizione dei punti che scivolano dentro la scanalatura rettilinea (per comodità chiama questa retta s).

3 Se il puntatore P descrive un segmento, quale figura descrive il tracciatore P'? E se P descrive un quadrato, quale figura descrive P'?

- Fai altre prove e confronta le figure tracciate da P e quelle corrispondenti tracciate da P': cosa osservi?
- Fai una lista delle proprietà geometriche conservate e un'altra con le proprietà geometriche che non si conservano.

4 Blocca la macchina in una configurazione precisa (è importante non far scivolare la macchina in s). Analizza la figura geometrica formata dalle aste di metallo che compongono la macchina.

- Trovane il centro e misura tutti i segmenti (lati e distanze dal centro) che riesci a trovare.

- Considera le distanze che P e P' hanno da s. Che relazione c'è? Quanto vale il loro rapporto?

5 Ripeti tutte le misurazioni che hai svolto nel punto 4, cambiando più volte la configurazione iniziale. Quali sono le proprietà che si conservano?

6 Fai riferimento alle figure e alla lista che hai fatto nel punto 3. Tieni presente che A e A', messe in corrispondenza dalla macchina, appartengono a semipiani opposti rispetto alla retta s. Prova a descrivere la trasformazione realizzata dalla macchina.

- Rappresenta in un unico sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy i punti P e i corrispondenti punti P' secondo la trasformazione. Disegna tutto sui fogli sulla macchina.

  Suggerimento: ti conviene far coincidere un asse del riferimento cartesiano con la scanalatura. Dove ti sembra più conveniente mettere l'origine O di questo sistema?

- La trasformazione che descrive la macchina l'hai già analizzata in passato: scrivine le equazioni cartesiane.

7 Disegna una circonferenza γ con P, in questo modo:

* fissa la puntina da disegno in un punto qualsiasi di A, facilmente raggiungibile da P (la puntina da disegno sarà il centro O di γ);
* aggancia alla puntina da disegno la graffetta di $3cm$ (la graffetta sarà il raggio r di γ);
* inserisci il puntatore P all'estremità libera della graffetta ed effettua il disegno di γ.

Considera il sistema di riferimento Oxy in cui l'origine O è proprio il centro di γ e un asse cartesiano è parallelo alla scanalatura s. In questo modo il tracciatore P' sarà posto a destra di P, oppure sotto P (in base a come hai scelto l'asse coincidente con s).

- Scrivi l'equazione del cerchio di centro O e raggio r.

8 Se P descrive γ come in 6, quale figura viene descritta da P'?
Per comodità, rappresenta il riferimento cartesiano Oxy coincidente con tutto il piano in legno che costituisce la macchina matematica, in cui l'origine O è il centro di γ.

- Descrivi la nuova figura ottenuta tramite trasformazione di γ. Questa figura è già stata analizzata in passato: che cos'è e quali sono le sue proprietà? Scrivi, se ci sono, il centro, gli assi di simmetria, ecc.

9 Utilizzando le equazioni della trasformazione realizzata dalla macchina e trovate nel punto 5, scrivi l'equazione della nuova figura.

È necessario adattare sia il pantografo per lo stiramento e sia i supporti cartacei alle esigenze dell'alunno non vedente, al fine di favorirne l'integrazione all'interno della classe e di accrescerne l'autonomia (si veda la Sezione 1.3).
Per quanto riguarda la macchina matematica, è possibile rivestirne il piano in legno (entrambe le metà, facendo attenzione a non coprire la scanalatura) con la gomma eva, fissandola prudentemente con dello scotch. Così si può adagiare un foglio di plastica trasparente con i buchi sul piano gommato e, nel momento dell'incisione con la mina, è possibile percepire al tatto l'increspatura corrispondente alla figura rappresentata. Lo studente cieco, che esplora con tutte e due le mani l'intera superficie in esame, avvertirà, attraverso la percezione aptica, il corrugamento della plastica e potrà riconoscere la forma che è stata disegnata.
Per poter effettuare in totale autonomia tutte le misurazioni, si possono fornire al disabile visivo una squadra e un goniometro con segnalazioni tattili (Figura 1.12 a pagina 31).
Infine le domande in formato cartaceo saranno sostituite da tre file WORD perfettamente fruibili dall'alunno non vedente con i software per la sintesi vocale e la barra Braille.
Lo scopo di questa attività non è lo studio della macchina matematica in sé, a cui senz'altro va il pregio di attirare l'attenzione degli studenti, ma della

sua trasformazione, cioè di un'operazione: si studiano sia l'oggetto meccanico e sia i suoi movimenti. La manipolazione del materiale mobile, messo nelle mani degli alunni e sottoposto alla loro attenzione, li conduce ad uscire dal campo ristretto della matematica concepita in modo statico e immutabile. È lo studente stesso che, facendo ripetute prove e misurazioni con il pantografo, arriverà ad impostare il problema sotto una forma più moderna (non è importante che arrivi alla corretta trascrizione delle formule geometriche, quanto è più rilevante che interiorizzi la trasformazione in esame), e i concetti matematici nasceranno nelle sue mani.

2.3 Ombre e trasformazioni geometriche

L'ellisse è caratterizzata da una proprietà che si può scoprire osservando l'ombra sul terreno di un disco illuminato dai raggi del Sole (Figura 2.15): se si espone un disco al Sole, i raggi che si appoggiano al bordo circolare formano un cilindro che, intersecando il piano (in questo caso il pavimento), forma un'ombra ellittica. La circonferenza si è trasformata in un'ellisse tramite un'affinità realizzata dai raggi solari.
In accordo con quanto detto a inizio capitolo (si veda Figura 2.1 a pagina 47), una trasformazione affine non conserva la forma di un oggetto: un cerchio è stato modificato in un ovale.

Quest'affinità viene perfettamente illustrata dalla macchina matematica chiamata genesi spaziale dello stiramento (Figura 2.16): I raggi del sole (materializzati nel modello con fili tesi e supposti paralleli) determinano, in generale, una corrispondenza biunivoca (detta prospettività con centro improprio) tra due piani π e π': ad ogni punto $P \in \pi$ corrisponde in π' la sua ombra P'. Si possono osservare un quadrato avente due lati paralleli all'asse u che si trasforma in un rettangolo e una circonferenza avente sempre come corrispondente un' ellisse con un asse di simmetria parallelo a u. Ruotando il piano π fino alla sovrapposizione con π', i raggi (i fili) che congiungono due punti corrispondenti qualsiasi sono perpendicolari ad u: la corrispondenza

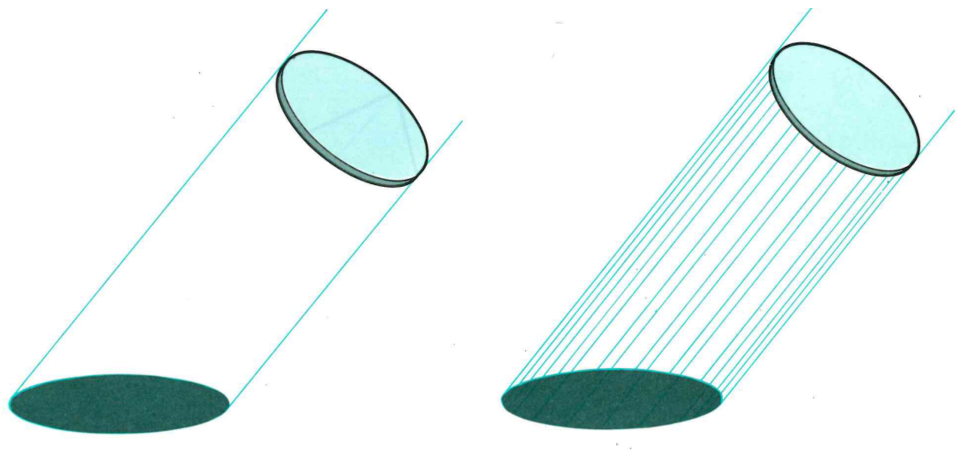


Figura 2.15: Ellisse ottenuta come ombra di un cerchio data dai raggi del Sole. Immagine presa da [9].

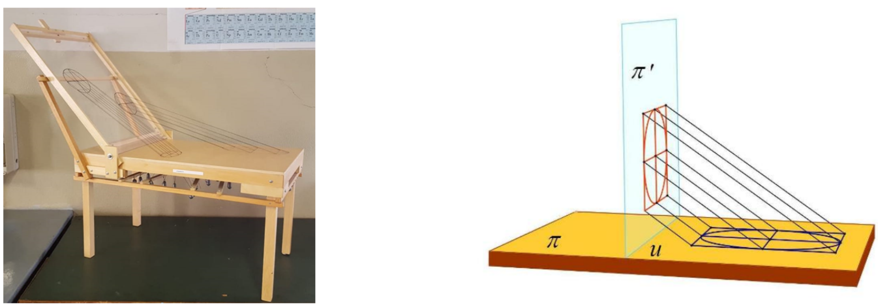


Figura 2.16: Fotografia e immagine virtuale della genesi tridimensionale dello stiramento.

creata in questo caso è la trasformazione geometrica nota come stiramento. Mentre per la genesi tridimensionale le proiezioni avvengono per linee parallele (si forma un cilindro di raggi solari, in Figura 2.15), esistono macchine matematiche che proiettano per linee incidenti (cono visivo): si tratta dei prospettografi. Questi strumenti sono nati intorno al 1500 per migliorare lo studio delle anamorfosi.

2.3.1 Anamorfosi

Il termine anamorfosi, dal greco "riformazione", definisce una "forma ricostruita" attraverso trasformazioni di illusione ottica. L'inganno anamorfico distorce fortemente l'immagine in modo tale che questa possa essere riconoscibile dall'osservatore solo se contemplata da una posizione precisa, particolarmente inclinata rispetto al piano su cui è realizzata. Per comprendere un dipinto realizzato tramite trasformazione anamorfica si utilizzano alcuni elementi di geometria proiettiva (si veda Sezione 2.4): è necessario immaginare il dipinto proiettato su una parete trasparente verticale e calcolarne l'immagine corrisposta orizzontalmente sul terreno. L'immagine al suolo subisce un'inversione prospettica, dando origine a quella che comunemente è chiamata anamorfosi ottica. Più l'oggetto da osservare è in basso rispetto allo sguardo dell'osservatore, meno deve essere forzata la prospettiva in alto; più l'oggetto si innalza verso gli occhi del suo spettatore, più deve essere allungata l'immagine prospettica in modo da rendere al meglio l'effetto anamorfico. Tale organizzazione prevede una visione ravvicinata del dipinto, tanto che l'osservatore deve disporsi radente al suolo per poterlo ammirare alla perfezione.

Figura 2.17: Dipinto "Gli ambasciatori", di H. Holbien con particolare sul teschio.

Questa tecnica è stata per la prima volta adottata come cavallo di bat-

taglia dai pittori cinque-seicenteschi. Inizialmente venne sperimentata su piccole parti del dipinto, così da celare messaggi simbolici. Ne è un esempio l'opera "Gli ambasciatori" (1533) di Hans Holbein (Figura 2.17). Un teschio viene deformato anamorficamente in modo da risultare irriconoscibile all'osservatore. La tecnica utilizzata era la seguente: il pittore realizzava una prima bozza dell'immagine da occultare e la trasferiva su un cartone. Una volta trasposto, il soggetto veniva forato lungo i contorni e poi posto dinnanzi a un fascio di luce solare. La luce attraversava il cartone forato e, in base all'inclinazione della superficie cartonata, riproduceva un'ombra prospettica più o meno deformata sulla parete. In questo modo l'artista poteva infinitamente giocare con le più svariate inclinazioni.
È chiaro che lo strumento utilizzato dal pittore per la riproduzione di questa anamorfosi ottica è stata una primitiva macchina matematica.
Tornando alla geometria, ci occupiamo ora di rappresentare le coniche come anamorfosi di un cerchio, grazie all'uso della geometria proiettiva.

2.3.2 Proiezione di un cerchio da un punto: le coniche

Abbiamo detto che l'ombra di un cerchio data dai raggi del Sole è un'ellisse, questo perché le affinità non conservano la forma di un oggetto trasformato. Invece l'ombra di un cerchio data dai raggi di una lampadina puntiforme non è sempre un'ellisse, ma può assumere varie forme. Questo perché le proiettività sono trasformazioni che non conservano la forma (si veda Figura 2.2 a pagina 47).
Consideriamo sul piano π un cerchio, disegnato per semplicità sull'asse delle y. Nel caso della Figura 2.18, il cerchio si trova al di sotto del punto limite H (se veda Sezione 2.4); la sua ombra sul piano π', data dai raggi uscenti da S, è un ovale: si riesce a dimostrare che è un'ellisse.

Nel caso della Figura 2.19, il cerchio passa proprio per il punto H. Si capisce allora che il punto H del cerchio non avrà il suo corrispondente sul piano π', perché la retta SH è parallela a π'. Questo ci fa capire che la curva-ombra si apre e si ottiene una parabola.

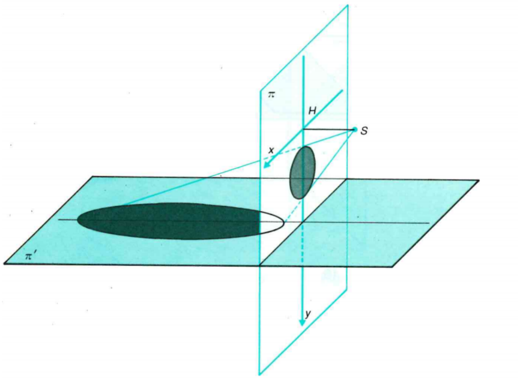


Figura 2.18: L'ombra del cerchio è un'ellisse. Immagine presa da [9].

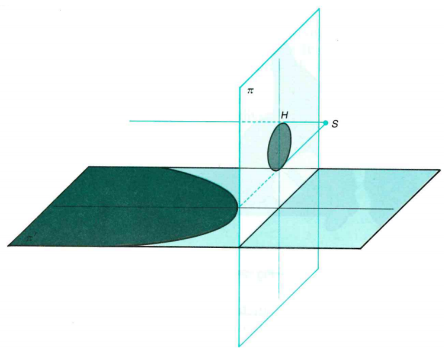


Figura 2.19: L'ombra del cerchio è una parabola. Immagine presa da [9].

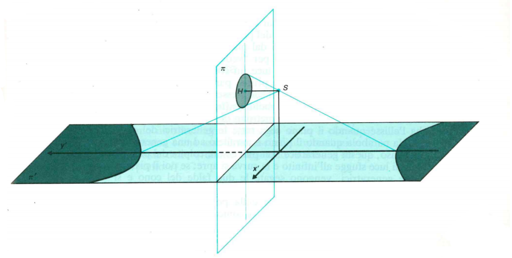


Figura 2.20: L'ombra del cerchio è un'iperbole. Immagine presa da [9].

Nel caso della Figura 2.20, il punto H è interno al cerchio. Accade, allora, che quando si proietta da S, alcuni punti del cerchio hanno sul piano π' i propri corrispondenti da una parte del piano π, gli altri punti, invece, hanno i corrispondenti dall'altra parte. La curva-ombra si compone di due rami simmetrici: si ha un'iperbole.
Si conclude che la proiezione di un cerchio da un centro S è un'ellisse, una parabola o un'iperbole a seconda della posizione di S rispetto al cerchio.
Nel caso dell'ombra di un cerchio data dai raggi del Sole, questi ultimi, considerati paralleli, appoggiandosi al cerchio, formano un cilindro di luce. Nel caso attuale, invece, i raggi provenienti dalla lampada S, appoggiandosi al cerchio, formano un cono di luce di vertice S. L'ombra del cerchio si può con-

siderare come sezione di un cono con un piano, anzi, l'esperienza descritta in Figura 2.20 ci conduce a considerare un cono con le sue due falde. Possiamo quindi stabilire che: le sezioni di un cono sono un'ellisse o una parabola o un'iperbole; queste tre curve si chiamano coniche. La Figura 2.21 riporta le tre coniche appena enunciate.
Lo schema descritto in Figura 2.22 chiarisce il diverso effetto prodotto su un cerchio dalla proiettività, affinità, similitudine e uguaglianza..

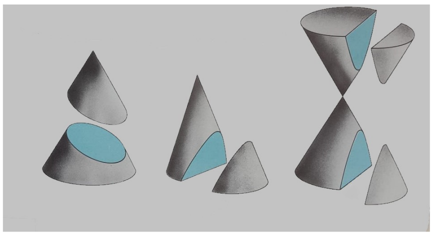


Figura 2.21: Se si taglia trasversalmente un cono con un piano si hanno un ellisse o una parabola o un'iperbole.

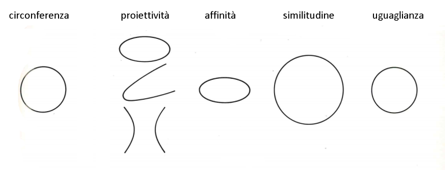


Figura 2.22: Le trasformazioni di un cerchio tramite proiettività, affinità, similitudine ed uguaglianza producono risultati differenti.

Cerchiamo, ora, di capire meglio che cosa sono le proiettività, già introdotte a inizio capitolo, e di renderle accessibili allo studio da parte di un non vedente.

2.4 Proiettività

Una trasformazione proiettiva, o proiettività, si ottiene in questo modo: si considera un telaio quadrettato e lo si illumina con raggi provenienti da una luce puntiforme, come in Figura 2.2. A rette parallele non corrispondono, nell'ombra, rette parallele (quindi sicuramente le proiettività non sono affinità).
Tuttavia si intuisce che, se si potesse portare la lampada a distanza infinita, queste rette risulterebbero parallele: ovvero le affinità sono un caso partico-

lare di proiettività.
Se invece, tenendo fissa la lampada, si cambia la posizione del telaio fino a disporlo parallelamente ad uno schermo, l'ombra del quadrettato si espanderebbe: si ha la similitudine.
Se ora si sposta la lampada allontanandola dal telaio, il quadrettato-ombra diventa più piccolo e tende a diventare come il telaio originale: si ha un uguaglianza.
Si conclude che affinità, similitudine e uguaglianza sono casi particolari di proiettività.
Sarebbe utile vedere quali sono le relazioni matematiche che passano tra gli elementi di un telaio quadrettato e gli elementi corrispondenti dell'ombra, quando la luce proviene da una lampada puntiforme S. Consideriamo una bacchetta HO perpendicolare al piano di proiezione π' e infilata in r, come in Figura 2.23.

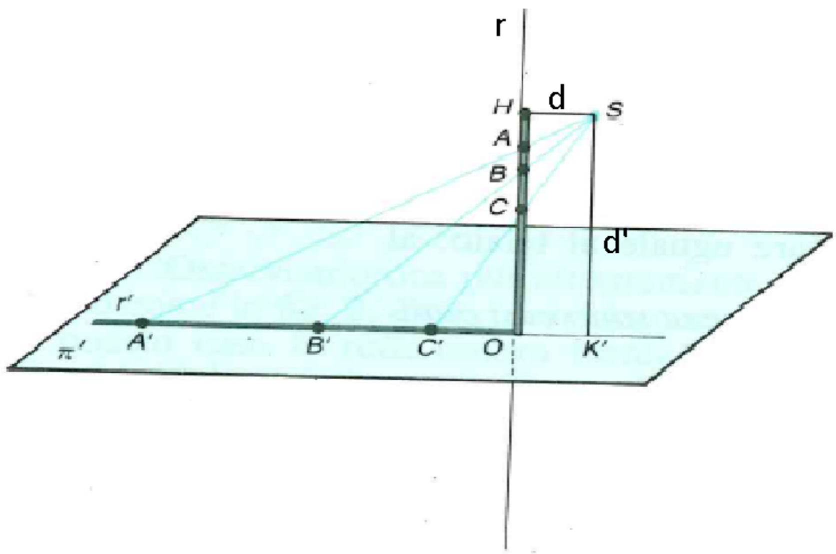


Figura 2.23: Proiezione di una retta da un punto. Immagine presa da [9].

Si vede subito che una retta, come r, ha certamente come ombra una retta, r'. Ai punti $A, B, C, ...$ della retta r corrispondono i punti $A', B', C', ...$ della retta r' e viceversa. Ci sono però due punti che sfuggono a questa corrispondenza: sono $H \in r$ (formato dall'intersezione della retta r con quella parallela a r' e passante per H) e $K \in r'$ (intersezione di r' con la retta passante per S e parallela a r). H non ha alcuna ombra su r', mentre K' non ha nessuna ombra su r : questi due punti si chiamano punti limite o punti di fuga.

Si dimostra (si veda [9] per la dimostrazione) che gli invarianti per le trasformazioni proiettive sono:

- il prodotto delle distanze di due punti corrispondenti dai rispettivi punti limite.

  Si tratta di un invariante sulle distanze di due punti corrispondenti dai punti limite. Rispetto alla Figura 2.23, si ha

  $$BH \cdot B'K' = dd'$$

  $$CH \cdot C'K' = dd'$$

  ....

- il birapporto.

  È una relazione che collega segmenti corrispondenti. Dalla Figura 2.23, si ha

  $$\frac{A'C'}{A'B'} : \frac{D'C'}{D'B'} = \frac{AC}{AB} : \frac{DC}{DB},$$

  sigifica che il rapporto di rapporto (birapporto, appunto) fra segmenti corrispondenti non cambia proiettando 4 punti da una retta ad un'altra

Per arrivare a scoprire le relazioni che legano i punti del telaio alle ombre corrispondenti, bisogna studiare anche le proiezioni di un piano dal punto S : si illumini con un proiettore S una lastra trasparente che è tagliata perpendicolarmente da un cartone. La lastra è il piano π e il cartone è il piano π', che si tagliano lungo la retta a, come in Figura 2.24. Se ora disegniamo una figura su π, se ne potrà osservare l'ombra su π'. Si osserva in particolare che ogni retta r del piano π dà come ombra una retta r' del piano π' : r' si ottiene intersecando π' con il piano che contiene S e r (si veda

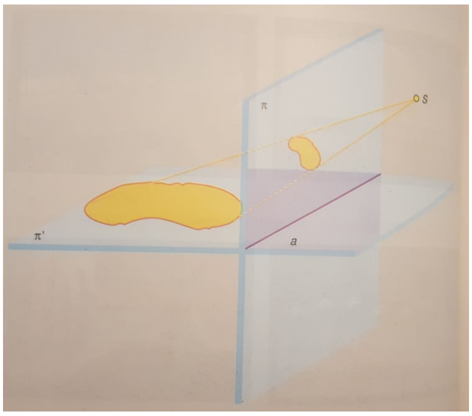


Figura 2.24: Un modello per studiare le trasformazioni proiettive.

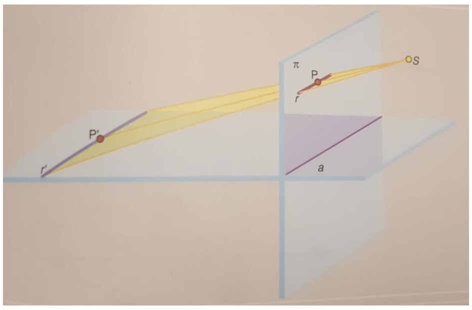


Figura 2.25: Una retta di π dà come ombra una retta di π'.

Figura 2.25).
Ci sono però due rette particolari, chiamate rette limiti, in Figura 2.26: la retta h, che non può avere ombra su π', è passante per il punto limite H ed è parallela ad a, e la retta k', che non può essere l'ombra di una retta di π perché è passante per K' ed è parallela ad a.

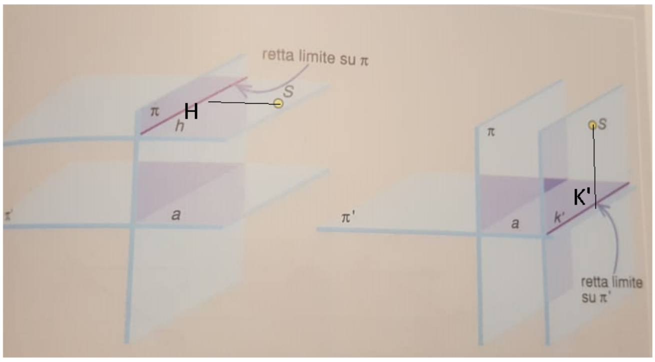


Figura 2.26: Le rette limite.

Fin'ora abbiamo condotto uno studio qualitativo per le proiettività, cioè di carattere grafico, assolutamente non funzionale per l'apprendimento di un

non vedente.
Neanche il passaggio alle equazioni analitiche (per un procedimento di ricerca delle equazioni analitiche proiettive si consulti [9]) può aiutare in questo caso: il piano in gomma e il piano a rilievo, che permettono lo studio analitico delle figure, non consentono una buona rappresentazione dello spazio tridimensionale (infatti sono dispositivi che solitamente si usano per le rappresentazioni cartesiane bidimensionali).
Se volessimo descrivere le proiettività ad un alunno con deficit visivo, dobbiamo ricorrere necessariamente all'uso di strumenti che siano in grado di guidare manualmente il soggetto. Nella seguente sezione ne presenteremo due.

2.5 Sussidi per la prospettiva

La genesi tridimensionale per lo stiramento (Figura 2.16, a pagina 69) fa parte del gruppo delle macchine matematiche chiamate prospettografi. Questi strumenti sono utili per fornire una rappresentazione piana di oggetti solidi: si possono considerare a tutti gli effetti dei buoni mezzi semiotici per lo studio della prospettiva da parte di alunni non vedenti.
La realtà di chi non vede, infatti, è assolutamente tridimensionale e l'esperienza della deformazione di un oggetto (ad esempio l'anamorfosi) è a lui sconosciuta: un tavolo rettangolare avrà sempre quattro angoli retti e solo dopo una forma di istruzione-informazione il cieco può accedere a concetti per noi intuitivi quali stiramento, proiezione, ombra di un oggetto e prospettiva.
In riferimento alla Sezione 1.6.1, ricordiamo che la visione è un senso di sintesi, cioè coglie prima gli aspetti generali dell'ambiente e solo successivamente passa all'analisi dei particolari, mentre la percezione aptica procede in modo opposto, dalle singole parti ricostruisce l'insieme. È l'attività mentale il punto in comune delle due esplorazioni: sia la vista e sia il tatto forniscono gli input al cervello per la costruzione delle opportune immagini simboliche.

Durante la visione si ha una proiezione sulla retina (che si può pensare bidimensionale) dell'oggetto tridimensionale, al quale si associano parallelamente i concetti di spessore e lontananza. Grazie a questo procedimento, fin da bambini i normodotati riescono a leggere correttamente le immagine disegnate sui fogli, anche se si tratta di proiezioni solide (il disegno della casa da parte di un infante avviene sovrapponendo una piccola piramide ad un cubo).
Non accade la stessa cosa per un non vedente: attraverso la sola esplorazione tattile di un'immagine a rilievo, che rappresenta una proiezione bidimensionale di un oggetto tridimensionale, è impossibile distinguerne la tridimensionalità e lo spessore. Le difficoltà maggiori nell'esplorazione bidimensionale di una figura da parte di un cieco sono l'invarianza della forma dell'oggetto vero, e l'impossibilità di avere esperienza nell'inganno visivo, si veda [21].
Per superare questi ostacoli è possibile utilizzare i prospettografi. Ad esempio, nella genesi per lo stiramento i fili elastici (che rappresentano i raggi del Sole) partono dal cerchio e terminano nell'ellisse: seguendo questo percorso con entrambe le mani, lo studente non vedente comprende che la deformazione della circonferenza non è arbitraria ma viene determinata dai raggi stessi.
In [21] si descrive la costruzione di uno strumento per le proiezioni ortogonali in cui possono essere fissati e collocati con velcro oggetti solidi in legno: il modello è composto da tre quadranti uniti con del velcro, sui quali si decide di proiettare una piccola stanza composta da un tavolo e una panca, Figura 2.27. Si procede alla spiegazione manipolando l'ausilio e mostrando con gli spostamenti del tavolo cosa si intende per proiezione, cioè quali facce del tavolo imprimono la traccia sui quadranti. Poi si "apre" il modello e si accosta il quarto quadrante: così mediante cordoncini che si fissano sul velcro, si evidenziano le linee che generano la figura in proiezione.

Con la stessa strategia si può realizzare e presentare un secondo artefatto. Il modello consiste ancora in una stanza in cui il punto di vista (il punto S nelle esperienze della Sezione 2.4) è rappresentato dall'occhio di un pupazzo: da quì parte un filo elastico (lo "sguardo") che collega al punto limite sulla parete di fondo della stanza in miniatura. Dal punto limite partono tutti i

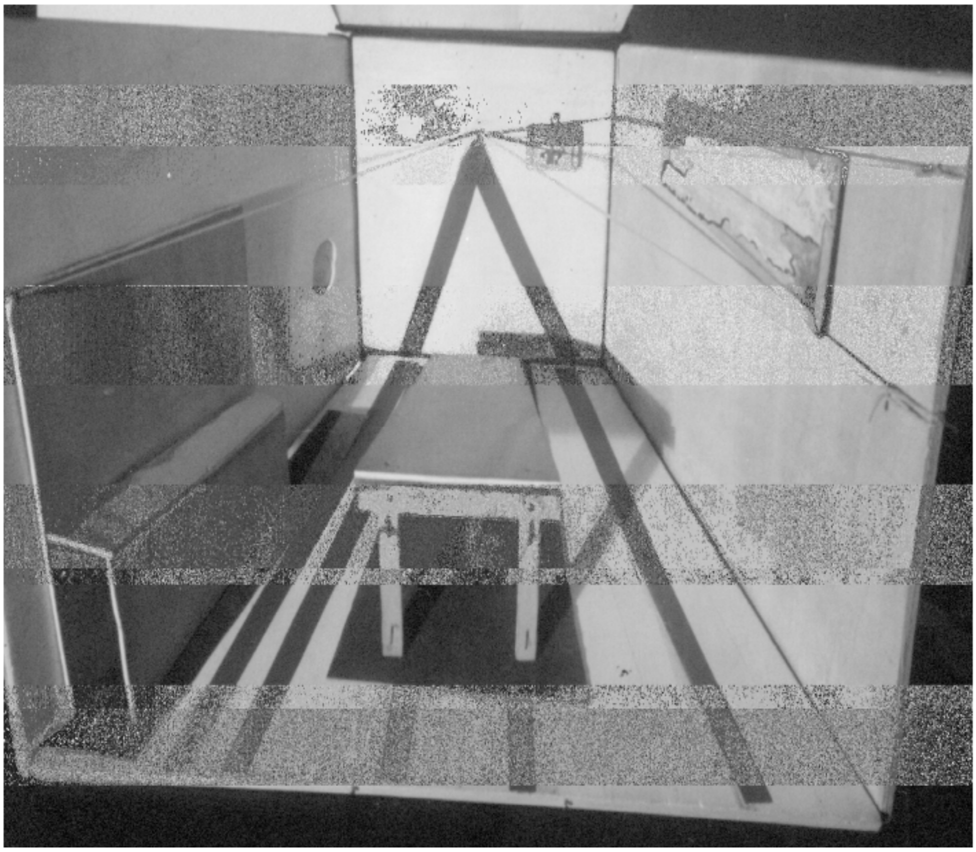


Figura 2.27: Il modello per lo studio della prospettiva secondo [21]

raggi che descrivono gli arredi: si dimostra che la deformazione degli arredi non è arbitraria ma determinata dai raggi stessi. Ora, come per il modello delle proiezioni ortogonali, si apre l'ausilio e si studiano le caratteristiche della rappresentazione in prospettiva. Anche in questo caso, l'alunno non vedente non rappresenterà passivamente gli oggetti che incontra nell'esplorazione tattile: ad esempio, un tappeto rettangolare disegnato in forma di trapezio non sarà manifestazione di verbalismo, ma la realizzazione piana di una figura tracciata da raggi visivi percepiti in maniera tattile da un disabile visivo.

Capitolo 3

Sperimentazione in classe con curvigrafi

In questo capitolo verrà esposto il percorso didattico svolto in classe con Sara[8], alunna di terza superiore di un liceo linguistico di Bologna. Dopo aver presentato la ragazza ed esposto le finalità che tale laboratorio si pone, ci si concentrerà sull'organizzazione del progetto. L'attenzione si sposterà sulla programmazione specifica di ogni singola sessione dell'attività, articolata su tre giornate differenti, e sulla modalità ed il materiale usato dalla ragazza non vedente.
Il laboratorio svolto presso il liceo è stato affrontato in collaborazione con un'altra laureanda magistrale in Matematica presso l'Università di Bologna, Alessia Raggi, la cui tesi in [24] considerarsi in continuità con questo elaborato. Insieme abbiamo progettato e svolto l'intera attività: mentre questa tesi evidenzia la valenza che le macchine hanno nell'apprendimento della geometria per i non vedenti, quella di Alessia si focalizza sulle conseguenze dell'uso dei curvigrafi nella didattica della matematica per i normodotati.

[8]Nome di fantasia.

3.1 Il caso di Sara

Di fronte ad un particolare caso di deficit visivo non è possibile trovare un'unica strategia didattica, poiché bisogna tener conto di diversi fattori: il tipo di patologia, la prognosi, l'età, l'educazione ricevuta al tipo di attività svolte sia in classe sia fuori dalla scuola, la personalità, le aspirazioni personali e le strategie adattive.È quindi necessario conoscere la storia di Sara.
Sara ha subito una progressiva perdita della vista a causa di un glaucoma: fino ai 2 anni riusciva a vedere e distinguere colori e forme, dai 3 anni vede solo ombre e luci. Il suo caso non può essere ricondotto né alla categoria di cieco congenito, né a quella di cieco tardivo. Ha imparato ad utilizzare gli strumenti compensativi fin da subito: le è stato insegnato solo l'alfabeto Braille al posto della scrittura in nero, mentre per i numeri ha imparato sia la numerazione in Braille che quella decimale. Frequenta da sempre l'Istituto dei ciechi Francesco Cavazza[9], un centro all'avanguardia nella ricerca e nello sviluppo per l'integrazione scolastica e lavorativa dei ciechi: proprio in questo luogo è avvenuto il nostro primo incontro, verso la fine di settembre 2019 e grazie alla segnalazione di Vito La Pietra, addestratore tifloinformatico del centro.
Sara appare da subito una ragazza sveglia e solare, ama leggere (soprattutto i libri in lingua francese ed inglese) e uscire con le amiche. Dai suoi hobby si evince che sa usare molto bene sia gli strumenti informatici a sua disposizione (per leggere utilizza i file in PDF o in DOC, lo screen reader NVDA e la barra Braille Lilli) e sia il bastone da orientamento: è totalmente indipendente in tutte le attività, sia scolastiche che extra-scolastiche. Ha un'ottima mobilità e orientamento, frutto di esperienze e di un lungo processo educativo appresi all'Istituto Cavazza.
Per quanto concerne la sua esperienza scolastica, non ha mai richiesto una programmazione differenziata, svolgendo tutti i compiti in parallelo ai compagni di classe: si è avvalsa di strumenti informatici, dell'insegnante di so-

[9]Sito web `https://www.cavazza.it/`

stegno, della riduzione del tempo o, in alternativa a quest'ultima, dell'uso di modalità diverse per lo svolgimento di compiti e prove scritte di verifica, come ad esempio la creazione di un file in WORD al posto di un testo in nero su un foglio di carta.
Sara ha svolto, e continua a svolgere, tutti gli esercizi e le verifiche in formato elettronico, usando un PC fornito dall'Istituto in cui sono presenti molti tra i software esposti nella Sezione 1.6.2, tra cui sicuramente NVDA, WORD e LAMBDA: i professori possono caricare tramite una pendrive le domande, o gli esercizi, in formato .DOC oppure .LAMBDA, la studentessa elabora il contenuto aiutandosi con la sua personale barra Braille e, a fine lezione, restituisce ai professori i file con i risultati. Ovviamente questo richiede che entrambi gli insegnati, curricolare e di sostegno, sappiano usare correttamente i sussidi tifloinformatici.
Durante il suo percorso scolastico, Sara ha riportato ottimi risultati in ambito umanistico-letterario, mentre ha riscontrato alcune difficoltà nell'area scientifico-matematica: entrambi gli insegnati (curricolare e di sostegno) del biennio non hanno adattato tutto il programma alle richieste fatte dall'alunna che quindi, spesso, ha svolto gli esercizi e i compiti in classe senza il materiale adeguato ai non vedenti, senza riduzione del tempo e senza l'uso di modalità diverse, ottenendo scarsi risultati.
Da un primo colloquio fatto con Sara insieme al dott. La Pietra, è emerso che l'apprendimento della geometria euclidea del piano è stato difficoltoso non solo a causa della modalità di insegnamento, ma anche per alcuni fattori cognitivi, come la creazione di immagini mentali e le abilità visuo-spaziali (si veda la Sezione 1.7.1). Ad esempio, nel merito della conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (obiettivo previsto dalle Indicazioni Nazionali) la ragazza afferma:

> «Delle trasformazioni geometriche mi ricordo un po' la traslazione...È una formula che applico ad esempio ad un triangolo. Prendo i punti [si riferisce ai vertici] del triangolo, applico la formula e ottengo altri punti che mi danno il triangolo traslato.»

Si nota come Sara sia legata all'unico strumento utilizzato nel corso del biennio per la risoluzione di esercizi matematici: il software LAMBDA. Come già accennato nella Sezione 1.6.2, questo strumento è essenziale per il calcolo algebrico introdotto nei bienni delle scuole di secondo grado, ma risulta poco efficace nella geometria a causa della sua natura sequenziale: con questo sistema è possibile leggere e gestire blocchi di testo in sequenza, non di certo figure geometriche rappresentate su un piano cartesiano. In questo caso l'insegnate avrebbe dovuto affiancare all'uso corretto del software anche il piano in rilievo (Figura 1.10 a pagina 31), così da poter utilizzare la percezione aptica sostituendo il coordinamento visivo-motorio a quello bimanuale (come esposto nella Sezione 1.6.1), lasciando il tempo di creare una corretta immagine mentale della trasformazione geometrica.

3.2 Obiettivi e motivazione della scelta

Con l'inizio del nuovo anno scolastico, Sara ha cambiato sia docente di matematica sia insegnante di sostegno. Ad ottobre 2019 è stato proposto loro il laboratorio delle macchine matematiche, non solo nella didattica speciale come integrazione all'uso del piano in rilievo ed, eventualmente, del piano in gomma, ma anche come laboratorio di classe al fine di stimolare, attraverso la manipolazione concreta di oggetti, un tipo di apprendimento attivo da parte di tutti gli studenti. Gli insegnanti hanno accettato di buon grado questa proposta, manifestando anche l'intenzione di collaborare più attivamente con l'Istituto Cavazza, per apprendere l'uso dei sussidi per i ragazzi non vedenti nell'ambito della didattica matematica (descritti nella Sezione 1.6.2).
Il tema centrale del laboratorio è stata l'introduzione all'argomento delle coniche attraverso l'uso di macchine matematiche. Lo studio delle sezioni coniche è uno degli obiettivi specifici di apprendimento previsti per il secondo biennio dei licei. Nello specifico esse affermano:

> «Le sezioni coniche saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico. Inoltre, lo studente approfon-

> dirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria.»

Questo argomento spesso viene affrontato in modo classico attraverso spiegazioni verbali, scritture sulla lavagna (anche LIM) e l'uso dei tipici software, come GeoGebra. Si tratta di artefatti secondari utili per la creazione dei terziari (si veda Sezione 1.7.1); ma per un alunno non vedente, e soprattutto per Sara che deve superare le difficoltà incontrate nello studio della geometria durante il primo biennio, sono necessari gli artefatti primari. Si è quindi pensato di utilizzare come mezzi primari principali nell'introduzione delle coniche le macchine matematiche: in questo modo, l'approccio di tipo laboratoriale, che sfrutta la manipolazione di oggetti concreti, permette non solo un apprendimento attivo e duraturo, ma favorisce anche l'interazione e l'integrazione tra ragazzi (in riferimento a quanto detto nella Sezione 1.7.3).

3.3 Progettazione ed adattamento dell'attività

L'attività in classe, come già spiegato nella Sezione 3.2, consiste in un laboratorio di matematica sull'argomento delle coniche, svolto utilizzando le macchine matematiche prese in prestito dal Liceo Augusto Righi di Bologna. In particolare sono stati utilizzati dieci ellissografi a filo (Figura 3.1), cinque parabolografi di Cavalieri (Figura 3.2) e cinque parabolografi a filo (Figura 3.3).

Questo percorso didattico è stato suddiviso in tre lezioni, aventi un'organizzazione interna ben precisa e poste a distanza di una settimana o di qualche giorno l'una dall'altra, per una durata totale di 5 ore, suddivise come mostrato in Tabella 3.1.
Dopo ogni incontro, l'organizzazione interna della lezione successiva è stata ripensata e opportunamente modificata a fronte di quanto analizzato la volta

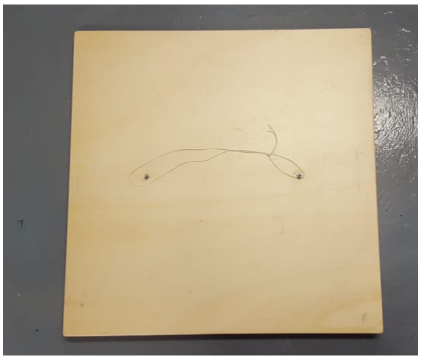


Figura 3.1: Ellissografo a filo.

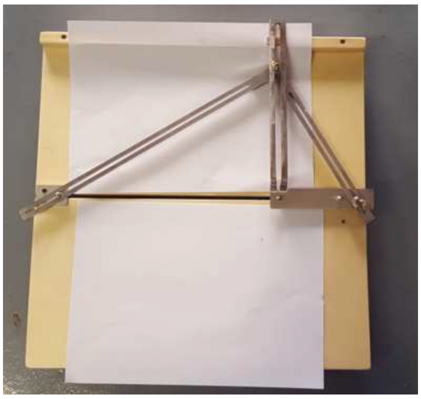


Figura 3.2: Parabolografo di Cavalieri.

Figura 3.3: Parabolografo a filo.

precedente. I tempi per lo svolgimento degli esercizi e gli strumenti ausiliari sono stati ridefiniti in maniera adeguata.

Bisogna tener presente che, durante la sperimentazione, l'argomento trattato risultava nuovo agli studenti: non era ancora stato introdotto dall'insegnante di matematica, che però, sotto nostra richiesta, aveva ripassato alcune definizioni utili per lo svolgimento delle attività.

Prima lezione	8 Novembre 2019 durata 2 ore	Laboratorio sull'ellisse
Seconda lezione	15 Novembre 2019 durata 2 ore	Laboratorio sulla parabola
Terza lezione	19 Novembre 2019 durata 1 ora	Conclusione attività

Tabella 3.1: Scansione temporale dell'attività

Tutte le lezioni sono state pensate e condotte da Alessia Raggi e da mei. La docente di matematica della classe di Sara ed il suo insegnante di sostegno erano presenti in aula, durante lo svolgimento dell'attività, aiutandoci nella gestione delle dinamiche interne della classe. Io mi sono occupata dell'adattamento per Sara di ogni strumento consegnato in classe; sono stata aiutata dal dott. Vito La Pietra. Tutte le schede e i sussidi da utilizzare in aula sono stati consegnati qualche giorno prima dell'inizio dell'attività, in modo che sia il docente curricolare sia quello di sostegno avessero il tempo di analizzarli e far presente eventuali dubbi e perplessità.
Durante lo svolgimento del laboratorio sono stati posizionati quattro tablet per poter registrare le voci degli studenti durante le discussioni; si è scelto, ovviamente, di posizionare un registratore nel gruppo di Sara, mentre gli altri tre sono stati attribuiti casualmente a tre diversi gruppi.

3.3.1 Prima lezione: ellissografo a filo

La prima lezione, dalla durata di 2 ore, è stata suddivisa in 3 parti:

- prima parte. Introduzione.
  I quindici minuti iniziali sono stati dedicati alla presentazione delle macchine matematiche da un punto di vista teorico. Sono state mo-

strate alcune macchine realizzate per l'occasione e adattate per i non vedenti: il compasso piano e il parallelogramma di Watt.

- seconda parte. Lavoro di gruppo.
  La classe è stata suddivisa in 8 gruppi a cui è stato dato un ellissografo a filo, senza averne spiegato il funzionamento. Sono state consegnate loro due schede guida di esplorazione della macchina e di analisi della curva. Bisognava rispondere ad ogni domanda sui fogli loro consegnati. Sara ha usufruito di un ellissografo adattato e delle stesse schede dell'attività in formato non cartaceo, bensì elettronico (file WORD): in questo modo avrebbe potuto rispondere modificando direttamente il file, contemporaneamente allo svolgimento dell'attività sui fogli di carta dei suoi compagni.

- terza parte. Discussione collettiva.
  Gli ultimi 10 minuti sono stati impiegati per la correzione delle domande più complesse; in particolare si è cercato di far emergere il passaggio dal piano sintetico a quello analitico. A Sara è stato dato, in questa occasione, un piano cartesiano in rilievo.

Introduzione

Durante l'introduzione storica è stata data la definizione di macchina matematica ed alcuni esempi: ci si è focalizzati soprattutto sul compasso piano, rilevante per la sua precoce realizzazione nella storia della matematica e per la sua semplicità. Si è mostrata una riproduzione di questo strumento, illustrata in Figura 3.4, appositamente realizzato per questa occasione. Il materiale usato per l'adattamento del compasso piano ai non vedenti consiste in un foglio di gomma eva[10], un foglio in plastica con i buchi, forbici, scotch, mine

[10] La gomma eva (o crepla) è una gomma che si ottiene dalla lavorazione della resina termoplastica. Si vende sotto forma di fogli 80x60 cm dal costo relativamente basso. Viene utilizzato al posto del piano ad incisione, troppo ingombrante e costoso.

3B e alcune rondelle piane da 4 mm.
La Figura 3.5 riporta il compasso piano adeguatamente adattato per Sara.

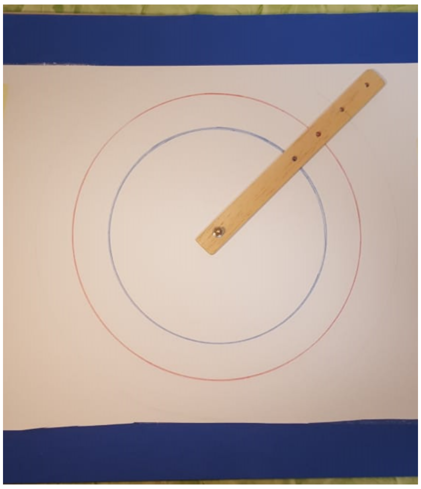


Figura 3.4: Compasso piano.

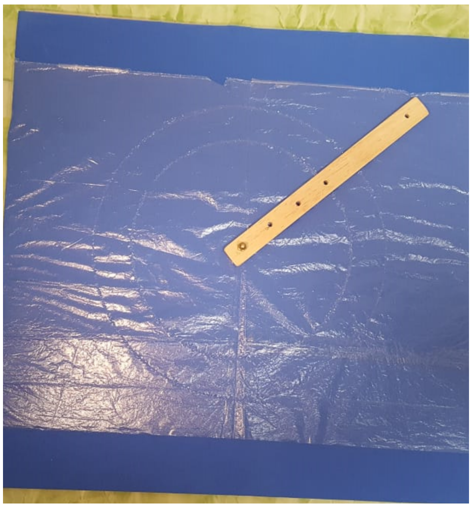


Figura 3.5: Compasso piano adattato ai non vedenti.

Il funzionamento del compasso piano e del compasso piano adattato è identico, differiscono solo per i supporti su cui disegnare: per il primo è un foglio di carta A2 (o 4 fogli di carta A4 fissati in modo da coprire tutta la tavola), mentre per il secondo è un foglio di gomma eva con sopra un foglio di plastica con i buchi, opportunamente fissato con lo scotch sulla base di legno. Le rondelle servono per creare spessore tra la tavola e il segmento di legno: aggiungendole attorno al perno, è possibile inserire il foglio di gomma eva e il foglio di plastica, passando velocemente dal compasso piano a quello adattato.
In particolare, il compasso piano adattato ai non vedenti è stato realizzato forando il foglio di gomma con sopra il foglio di plastica in corrispondenza del perno (centro della circonferenza): la morbidezza della gomma eva e lo spessore del foglio di plastica simulano il foglio in thermoform usato nel piano in gomma (Figura 1.11 a pagina 31), per cui se si infila una comune penna biro o una matita in uno dei fori del segmento di legno (raggio della

circonferenza) e si segue il movimento applicando una leggera pressione, si produce una circonferenza in rilievo che risulta immediatamente percepibile al tatto.
Per un normodotato è possibile rimuovere la gomma eva con sopra il foglio di plastica ed inserire un foglio di carta A2, forato in corrispondenza del perno: seguendo con una penna gli stessi movimenti appena descritti apparirà una circonferenza in nero.
Subito dopo l'esposizione di questa macchina, si è riportato alla memoria degli studenti la definizione di luogo geometrico e di circonferenza, concentrando l'attenzione sulla proprietà che la caratterizza (ossia l'equidistanza di ogni suo punto dal centro), emersa spontaneamente dagli interventi dei ragazzi.
Si è passato poi a descrivere l'ulteriore esempio di macchina matematica significativa da un punto di vista storico: il parallelogramma di Watt (Figura 3.6). Questo strumento descrive la traiettoria della cosiddetta curva di Watt, una particolare lemniscata avente la forma di un "infinito" o di un "fiocco".
Il parallelogramma di Watt, a differenza del compasso piano, è stato creato senza il supporto della tavola in legno, in modo da essere più leggero e quindi più facilmente trasportabile (conforme alle caratteristiche del materiale specifico, si veda la Sezione 1.5.2).È possibile inserire sotto lo strumento un foglio di carta (Figura 3.7), oppure un foglio di gomma eva con sopra un foglio di plastica con i buchi (Figura 3.8), inserire la mina 3B nel portamine e disegnare la curva: lo strumento è, così, perfettamente adattabile sia ai normodotati che ai non vedenti.

Questa macchina ha destato fin da subito un ampio interesse negli studenti, che hanno immediatamente accostato la traiettoria della curva di Watt all'immagine dell'infinito. Sia il parallelogramma sia i piani di appoggio sono stati fatti girare tra i banchi, in modo tale da far provare ad ogni ragazzo l'utilizzo dello strumento.

Figura 3.6: Parallelogramma di Watt.

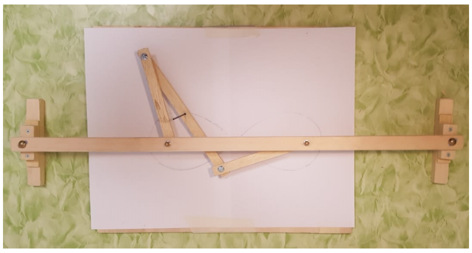


Figura 3.7: Parallelogramma di Watt che disegna una lemniscata.

Figura 3.8: Parallelogramma di Watt usato da Sara.

Lavoro di gruppo

Dopo la breve introduzione, è stato spiegato il laboratorio sull'ellisse, mettendone in evidenza la modalità e i tempi in cui sarebbe stata scandita l'attività, senza però mai fare riferimento alla curva in questione. Si è deciso di iniziare il percorso proprio da questa conica perché una delle macchine che la realizza, l'ellisografo a filo, è tra le più semplici ed intuitive nell'utilizzo, ed avendo già visto da un punto di vista sintetico la circonferenza, gli studenti avrebbero potuto facilmente fare collegamenti.
La classe è stata suddivisa in 8 gruppi, a 7 dei quali è stato consegnato un ellissografo a filo ricoperto con un foglio di carta A2 (Figura 3.9) e a quello di Sara un ellissografo a filo adattato (Figura 3.10).

I due ellissografi a filo (quello classico e quello adattato ai non vedenti) funzionano allo stesso modo: la punta di una biro, o di una matita, girando

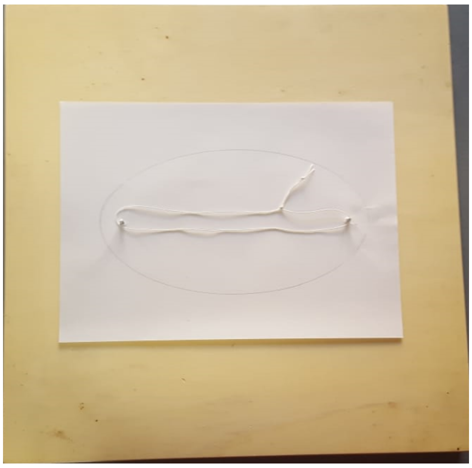


Figura 3.9: Ellissografo a filo.

Figura 3.10: Ellissografo a filo adattato ai non vedenti.

attorno ai due perni e mantenendo il filo (annodato ad anello attorno ai due chiodi) sempre teso, disegna un'ellisse. Differiscono solo per i supporti su cui disegnare: l'ellissografo a filo esige un foglio A4, oppure un A2, forato in corrispondenza dei perni, invece per l'ellissografo adattato bisogna utilizzare un foglio di gomma eva e un foglio di plastica con i buchi.
La macchina matematica adattata è stata creata adagiando il foglio di gomma e il foglio di plastica sulla base in legno, forandoli in corrispondenza dei due chiodi (fuochi dell'ellisse) e fissandoli con dello scotch. Analogamente al caso della circonferenza, eseguendo con una matita il movimento attorno ai due perni, si disegna un'ellisse sul foglio di plastica, che quindi si corruga leggermente. Grazie a questa increspatura della plastica è possibile percepire al tatto la curva appena creata.
La scheda esplorativa realizzata per la prima parte del laboratorio è formata da tre quesiti:

1. Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni suo elemento. Come pensate si possa utilizzare? fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

2. Inserite una mina all'interno del filo ad anello e, tenendo il filo sempre in

	VARIA	NON VARIA
Lunghezza del filo		
Distanza tra i perni		
Distanza tra la punta della matita e la retta passante per i due perni		
Ampiezza degli angoli delimitati dal filo teso e vertici nei due perni fissi		
Ampiezza dell'angolo delimitato dal filo teso e vertice nella punta della matita		
Distanza tra uno dei due perni e la punta della matita		
Somma delle distanze tra i due perni e la punta della matita		
Differenza delle distanze tra i due perni e la punta della matita.		

Tabella 3.2: Tabella da compilare presente nella terza domanda della prima parte della scheda sull'ellissografo a filo.

tensione, tracciare la curva. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma ha? Assomiglia a qualche curva che già conoscete? Se sì, che cosa hanno in comune e cosa no?

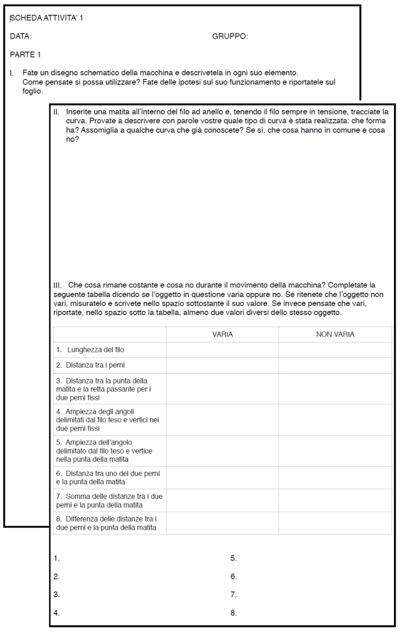
3. Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina? Completate la seguente tabella (si veda Tabella 3.2) dicendo se l'oggetto in questione varia oppure no. Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivetene il suo valore; se pensate che vari, riportatene almeno due valori differenti. Potete scrivere il valore delle misurazioni dentro la tabella, nella cella che ritenete opportuna.

La prima domanda permette ai ragazzi di famigliarizzare con uno strumento nuovo: sono liberi di esplorare l'oggetto, di disegnarne tutte le parti e di produrre congetture sul suo funzionamento. Utilizzando il software WORD, Sara avrebbe potuto disegnare la macchina matematica (anche solo schematizzandola), richiedendo il supporto dell'insegnante di sostegno per posizionare in modo più preciso le eventuali figure geometriche sul foglio elettronico. In alternativa, avrebbe potuto descrivere dettagliatamente l'ellissografo a filo, senza riportare nessun disegno.
Il secondo ed il terzo quesito sono posti in un foglio separato dal primo, in quanto nel testo viene spiegato il reale funzionamento della macchina.
In particolare la seconda domanda spinge gli alunni a fare congetture sulla curva che è stata realizzata: si vuole portarli ad esplicitare gli aspetti comuni o le differenze con la circonferenza.
Con l'ultimo quesito i ragazzi devono produrre ipotesi sul variare o meno di determinati componenti che formano la macchina. Sono incentivati a motivare le loro scelte attraverso misurazioni concrete. La relazione che si vuole far emergere è

$$l = b + d_1 + d_2, \tag{3.1}$$

dove l è la lunghezza del filo che compone la macchina, b è la distanza misurata tra i perni fissi e d_1 e d_2 sono le distanze tra la punta della matita e i due perni fissi.
A tutti i gruppi è stata fornita questa prima parte della scheda in formato cartaceo (Figura 3.11) e, solo a Sara, un file .DOC, in sostituzione ai due fogli di carta (Figura 3.12).
Per svolgere questa prima parte sono stati concessi 40 minuti circa.
Allo scadere del tempo stabilito, si è svolta una discussione collettiva mirata alla correzione della scheda: in questo tempo si è lasciato spazio alle voci degli studenti, che hanno riportato osservazioni e commenti.

La seconda parte che compone la scheda esplorativa dell'ellissografo a filo è composta da quattro quesiti:



SCHEDA ATTIVITA' 1

DATA: GRUPPO:

PARTE 1

I. Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni suo elemento. Come pensate si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

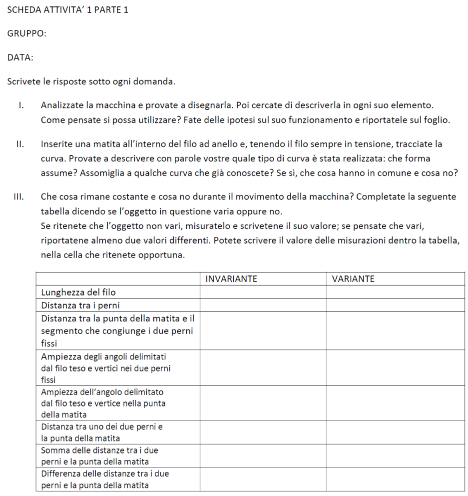
II. Inserite una matita all'interno del filo ad anello e, tenendo il filo sempre in tensione, tracciate la curva. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma ha? Assomiglia a qualche curva che già conoscete? Se sì, che cosa hanno in comune e cosa no?

III. Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina? Completate la seguente tabella dicendo se l'oggetto in questione varia oppure no. Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete nello spazio sottostante il suo valore. Se invece pensate che vari, riportate, nello spazio sotto la tabella, almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

	VARIA	NON VARIA
1. Lunghezza del filo		
2. Distanza tra i perni		
3. Distanza tra la punta della matita e la retta passante per i due perni fissi		
4. Ampiezza degli angoli delimitati dal filo teso e vertici nei due perni fissi		
5. Ampiezza dell'angolo delimitato dal filo teso e vertice nella punta della matita		
6. Distanza tra uno dei due perni e la punta della matita		
7. Somma delle distanze tra i due perni e la punta della matita		
8. Differenza delle distanze tra i due perni e la punta della matita		

1. 5.
2. 6.
3. 7.
4. 8.

Figura 3.11: Le due pagine relative alla prima parte dell'attività con l'ellissografo.



SCHEDA ATTIVITA' 1 PARTE 1

GRUPPO:

DATA:

Scrivete le risposte sotto ogni domanda.

I. Analizzate la macchina e provate a disegnarla. Poi cercate di descriverla in ogni suo elemento. Come pensate si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

II. Inserite una matita all'interno del filo ad anello e, tenendo il filo sempre in tensione, tracciate la curva. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma assume? Assomiglia a qualche curva che già conoscete? Se sì, che cosa hanno in comune e cosa no?

III. Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina? Completate la seguente tabella dicendo se l'oggetto in questione varia oppure no.
Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivetene il suo valore; se pensate che vari, riportatene almeno due valori differenti. Potete scrivere il valore delle misurazioni dentro la tabella, nella cella che ritenete opportuna.

	INVARIANTE	VARIANTE
Lunghezza del filo		
Distanza tra i perni		
Distanza tra la punta della matita e il segmento che congiunge i due perni fissi		
Ampiezza degli angoli delimitati dal filo teso e vertici nei due perni fissi		
Ampiezza dell'angolo delimitato dal filo teso e vertice nella punta della matita		
Distanza tra uno dei due perni e la punta della matita		
Somma delle distanze tra i due perni e la punta della matita		
Differenza delle distanze tra i due perni e la punta della matita		

Figura 3.12: Il file usato da Sara e relativo alla prima parte dell'attività con l'ellissografo.

4. Quale è la distanza massima e minima che riuscite a misurare tra il centro della curva e un punto che sta su di essa?

5. La curva tracciata ha un centro di simmetria? Ha assi di simmetria? Se sì, disegnali sulla macchina.

6. Ragionate sulle possibili modifiche alla macchina: immaginate di cambiare la distanza tra i due perni ma di non cambiare la lunghezza del filo.

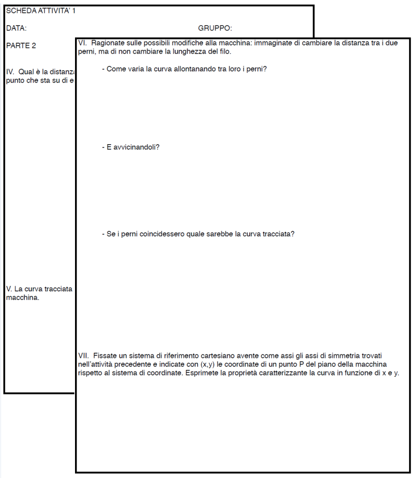
   - Come varia la curva allontanando tra loro i perni?
   - E avvicinandoli?
   - Se i perni coincidessero quale sarebbe la curva tracciata?

7. Fissate un sistema di riferimento cartesiano avente come assi gli assi di simmetria trovati nell'attività precedente e indicate con (x,y) le coordinate del

punto P del piano della macchina rispetto al sistema di coordinate. Esprimete la proprietà caratterizzante la curva in funzione di x e y.

Anche questa seconda parte, come la prima, prevede che le risposte siano date direttamente sulla scheda, quindi sono poste ben distanziate le une dalle altre. Si è stimato un tempo di 40 minuti per la compilazione di quest'ultima parte. Tutti questi quesiti, ad eccezione dell'ultimo, sottolineano la profonda connessione tra ellisse e circonferenza: ad esempio, la quinta domanda evidenzia come l'ellisse possieda due soli assi di simmetria, individuati dalla retta passante per i due perni della macchina e dalla perpendicolare a questa passante per il punto medio del segmento congiungente i perni, al contrario della circonferenza che, invece, ha infiniti assi di simmetria.
L'ultimo quesito, più complesso dei precedenti in quanto si distacca dal piano sintetico, ha l'obiettivo di far trovare l'equazione analitica della curva realizzata dall'ellissografo a filo, distinguendo gli oggetti (punti) che rimangono fissi da quelli che invece variano.
Le domande che suppongono una misurazione diretta, come la terza e la quarta, hanno richiesto l'utilizzo di righe e goniometri per tutta la classe; a Sara sono stati forniti un goniometro e una squadra con segnalazioni tattili, come in Figura 1.12 a pagina 31.
Il formato cartaceo della seconda parte delle schede è rappresentato in Figura 3.13, mentre la Figura 3.14 rappresenta il relativo file .DOC consegnato solamente a Sara.

L'adattamento delle consegne per i non vedenti, a differenza delle macchine matematiche, diverge dal trattamento riservato ai normodotati: si sarebbe potuta utilizzare la dattilobraille (Figura 1.6 a pagina 29) per riprodurre per Sara lo stesso testo in formato cartaceo e con la scrittura Braille, avvicinando i due modi di presentazione delle consegne, tuttavia si è scelto di presentare l'esercizio in formato digitale, dato che la studentessa è abituata a svolgere tutti i compiti di matematica utilizzando i sussidi informatici. Usando i software NVDA, WORD e la barra Braille (si consulti la Sezione 1.6.2), Sara ha potuto leggere e rispondere alle domande direttamente nel formato elettroni-


SCHEDA ATTIVITA' 1

DATA: GRUPPO:

PARTE 2

IV. Qual è la distanz
punto che sta su di e

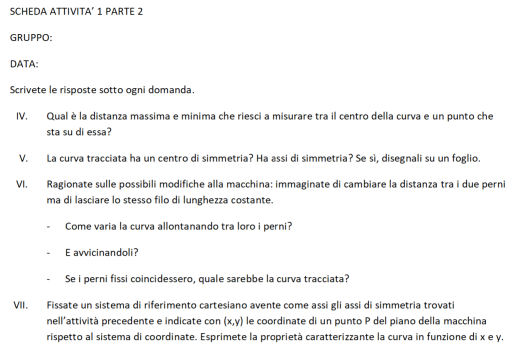
V. La curva tracciata
macchina.

VI. Ragionate sulle possibili modifiche alla macchina: immaginate di cambiare la distanza tra i due perni, ma di non cambiare la lunghezza del filo.

- Come varia la curva allontanando tra loro i perni?
- E avvicinandoli?
- Se i perni coincidessero quale sarebbe la curva tracciata?

VII. Fissate un sistema di riferimento cartesiano avente come assi gli assi di simmetria trovati nell'attività precedente e indicate con (x,y) le coordinate di un punto P del piano della macchina rispetto al sistema di coordinate. Esprimete la proprietà caratterizzante la curva in funzione di x e y.

Figura 3.13: Le due facciate relative alla seconda parte dell'attività con l'ellissografo.


SCHEDA ATTIVITA' 1 PARTE 2

GRUPPO:

DATA:

Scrivete le risposte sotto ogni domanda.

IV. Qual è la distanza massima e minima che riesci a misurare tra il centro della curva e un punto che sta su di essa?

V. La curva tracciata ha un centro di simmetria? Ha assi di simmetria? Se sì, disegnali su un foglio.

VI. Ragionate sulle possibili modifiche alla macchina: immaginate di cambiare la distanza tra i due perni ma di lasciare lo stesso filo di lunghezza costante.

- Come varia la curva allontanando tra loro i perni?
- E avvicinandoli?
- Se i perni fissi coincidessero, quale sarebbe la curva tracciata?

VII. Fissate un sistema di riferimento cartesiano avente come assi gli assi di simmetria trovati nell'attività precedente e indicate con (x,y) le coordinate di un punto P del piano della macchina rispetto al sistema di coordinate. Esprimete la proprietà caratterizzante la curva in funzione di x e y.

Figura 3.14: Il file usato da Sara e relativo alla seconda parte dell'attività con l'ellissografo.

co: questi strumenti informatici le hanno consentito di accedere all'attività in completa autonomia. In questo modo ha potuto modificare liberamente il file in formato .DOC, e a fine attività ha consegnato il lavoro salvandolo sulla pendrive dell'insegnante.
Le differenze tra i due formati sono evidenti, come mostrato in Tabella 3.3.

La lettura lineare digitalizzata attraverso la barra Braille non permette di spaziare in tutto il file di testo: se le domande poste nel file .DOC fossero state distanziate, Sara avrebbe incontrato molte difficoltà nel trovarle. Per i non vedenti è fondamentale creare un documento elettronico senza linee di comando, o righe, vuote.
Per lo stesso motivo, sarebbe stato impossibile per Sara collegare ogni cella della tabella con un testo esterno da compilare. Si è pensato, quindi, di far compilare il testo direttamente dentro ogni cella.
Utilizzando gli adattamenti proposti per la macchina matematica e per gli strumenti di lettura-scrittura, è possibile consegnare agli studenti non vedenti tutti i mezzi adeguati per renderli il più possibile autonomi e indipendenti.

Formato cartaceo per alunni vedenti	**Formato elettronico per alunni non vedenti**
Domande distanziate tra loro per consentire agli alunni di rispondere a penna sotto ciascuna di esse.	Domande poste una sotto l'altra per consentire ai non vedenti di passare agevolmente a quelle successive.
Spazi molto ampi per permettere di disegnare e scrivere nello stesso sito.	Lo spazio viene gestito direttamente dal fruitore non vedente: attraverso i comandi WORD, azionati con la barra Braille, è possibile creare tabelle, elenchi puntati e rispondere alle domande.
Tabella da riempire collegata a testo esterno: gli studenti possono completare la tabella e riportare le misurazioni relative ad ogni cella sotto la tabella.	La tabella può essere facilmente modificata con i comandi vocali di WORD e la barra Braille, tuttavia è impossibile collegare ad ogni cella un testo posto fuori dalla tabella. Si è deciso di far riportare le misurazioni direttamente dentro ogni cella.

Tabella 3.3: Differenze tra i formati proposti per rispondere alle domande dell'attività.

Conclusione

Negli ultimi dieci minuti di questa attività laboratoriale si è discusso riguardo l'ultima domanda posta nella scheda: sono state fatte considerazioni geometriche che, partendo dal punto di vista sintetico, sono giunte alla descrizione analitica dell'ellisse.
Una studentessa ha spiegato al resto della classe il suo metodo di ragionamento, riportandolo correttamente sulla lavagna.
A Sara sono stati consegnati un piano cartesiano in rilievo, due spaghi, lo scotch e il foglio di plastica su cui era incisa l'ellisse, in modo da seguire il ragionamento della sua compagna di classe e riprodurre sul piano in rilievo ciò che la ragazza disegnava alla lavagna (Figura 3.15). I calcoli sono stati svolti attraverso il software Lambda, come mostrato in Figura 3.16.

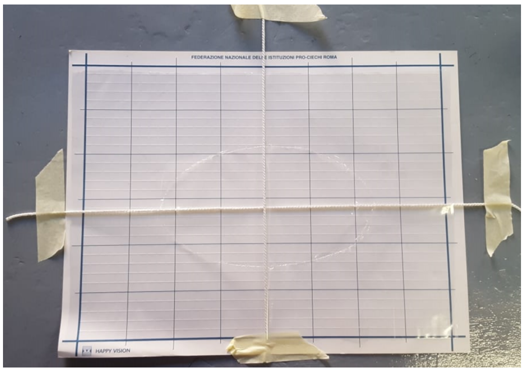


Figura 3.15: Piano cartesiano in rilievo con ellisse.

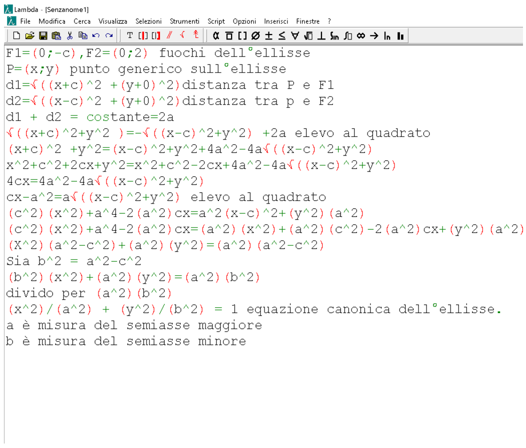


Figura 3.16: Calcoli svolti in LAMBDA.

Nella trascrizione dei calcoli in LAMBDA, per giungere all'equazione canonica, Sara è stata aiutata dall'insegnate di sostegno: il poco tempo rimasto a disposizione e la difficoltà nel cambiare continuamente formato (dal piano in rilievo, per seguire i ragionamenti sul disegno, al software, per svolgere i calcoli) hanno causato un ritardo nella scrittura di tutti i passaggi, che, in parte, sono stati dettati dal docente.È bene ricordare che la perdita di tempo, dovuta al cambiamento dei due mezzi di comunicazione, è causata solamente da un fattore fisico, e non psicologico: Sara necessita di più tempo nello svolgimento degli esercizi, o, in alternativa, di una riduzione delle domande.

3.3.2 Seconda lezione: parabolografo a filo e parabolografo di Cavalieri

La seconda lezione di laboratorio è stata strutturata in modo molto simile alla precedente: è stata progettata un'attività in gruppi (si è deciso di mantenere la stessa suddivisione della precedente sessione) che prevedeva l'esplorazione di due macchine matematiche diverse, con lo scopo di introdurre la parabola. Le due macchine utilizzate sono state il parabolografo a filo (Figura 3.3 a pagina 86) e il parabolografo di Cavalieri (Figura 3.2 a pagina 86).
Degli 8 gruppi formati, a 4 è stato consegnato un parabolografo a filo, mentre agli altri 4 un parabolografo di Cavalieri, ciascuno con la sua scheda guidata di esplorazione.
É stato adattato ai non vedenti sia un parabolografo a filo (Figura 3.17), che uno di Cavalieri (Figura 3.18).
A differenza della prima lezione, non c'è stata né un'introduzione, né una conclusione: l'intero laboratorio è stato spalmato sulle 2 ore a disposizione, con solo 20 minuti (tra la prima e la seconda ora) di interazione tra gruppi. Si è deciso di far collaborare i gruppi a coppia, aggregando quelli con macchine diverse e chiedendo di spiegare a vicenda il funzionamento del proprio strumento. Per questo motivo è stato necessario adattare entrambe le macchine a Sara.

Si è deciso di attribuire il parabolografo di Cavalieri a 4 gruppi, tra cui quello di Sara: la macchina a filo sarebbe stata più difficile per lei da usare, in quanto richiede precisione e coordinazione nel movimento dell'asta e del filo. Agli altri 4 gruppi sono stati consegnati i parabolografi a filo. Come accennato sopra è possibile dividere la seconda lezione in tre parti:

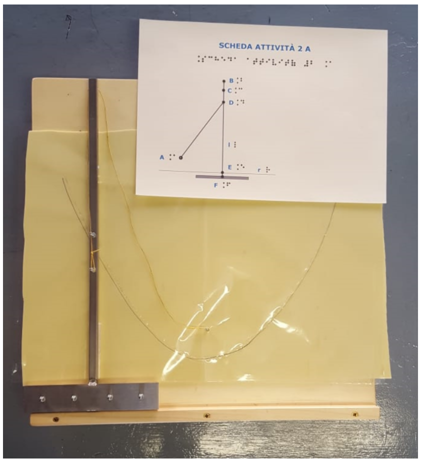


Figura 3.17: Parabolografo a filo adattato per i non vedenti.

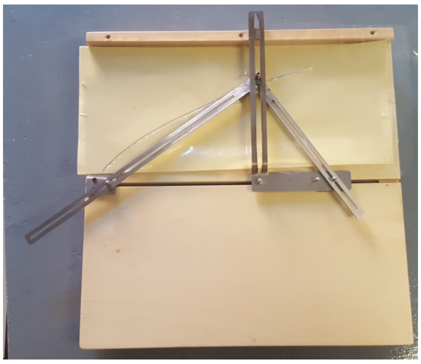


Figura 3.18: Parabolografo di Cavalieri adattato per i non vedenti.

- prima parte del lavoro di gruppo.
  L'attività è stata guidata da 1 scheda (esattamente come nella prima lezione), quasi identica per tutti i gruppi, ad eccezione di una domanda. Occorreva rispondere direttamente sui fogli consegnati.
  L'adattamento per Sara è consistito nel file in formato .DOC.

- confronto tra due gruppi ed esplorazione dell'altro parabolografo.
  Si è deciso di far interagire i gruppi tra loro, accoppiandone due con macchine diverse e chiedendo di spiegarsi a vicenda il funzionamento del proprio strumento. I quattro nuovi gruppi così formati si sono posizionati, per i primi 10 minuti attorno al parabolografo a filo, e ciascun membro del gruppo che aveva esplorato tale macchina ha esposto ai suoi compagni il funzionamento. Nei 10 minuti successivi, i gruppi si sono spostati attorno al parabolografo di Cavalieri ed hanno fatto lo stesso lavoro di presentazione per questa macchina.

- seconda parte del lavoro di gruppo
  I gruppi sono tornati alla formazione originaria ed hanno continuato il laboratorio seguendo le istruzioni contenute nella seconda scheda. Ogni

gruppo è stato dotato di un disegno schematico a colori della macchina in esame, con l'obiettivo di semplificare i riferimenti alle singole componenti dei parabolografi sia nelle domande della scheda che nelle risposte degli alunni.
A Sara sono stati consegnati, al posto delle schede cartacee, un file .DOC (contenente le domande della seconda parte dell'attività), una stampa Minolta (al posto dell'immagine a colori) e un foglio in Braille, stampato con la dattilobraille (in cui sono presenti i riferimenti ai vari elementi colorati della figura).

Lavoro di gruppo - Parte I

Al gruppo di Sara è stato assegnato il parabolografo di Cavalieri adattato (Figura 3.20). Questa macchina funziona esattamente come il parabolografo di Cavalieri classico (Figura 3.19), ovvero si posiziona una mina nel portamine e si muove l'angolo nella scanalatura: il movimento trascina la mina sul foglio in modo da descrivere un arco di parabola.

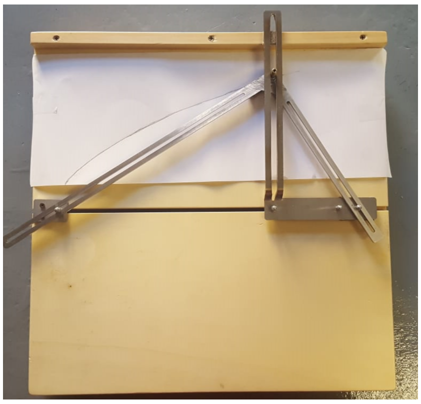


Figura 3.19: Parabolografo di Cavalieri.

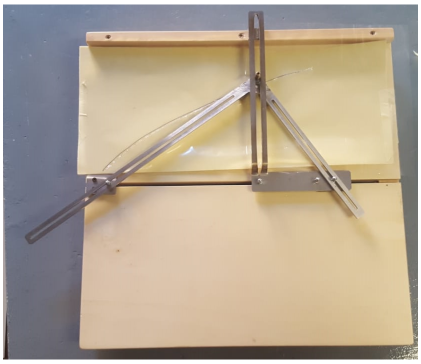


Figura 3.20: Parabolografo di Cavalieri adattato per i non vedenti.

I due strumenti differiscono solo per i supporti su cui disegnare (come per l'ellisografo a filo): il parabolografo di Cavalieri esige un foglio A2, da posizionare sotto le aste e le cerniere in metallo, invece per la macchina adattata

bisogna utilizzare la gomma eva e un foglio di plastica con i buchi. Il parabolografo è stato adattato adagiando il foglio in gomma e quello di plastica sulla tavola in legno, ritagliandoli in corrispondenza della scanalatura e fissandoli alle estremità con dello scotch. Eseguendo con la mina il movimento, viene tracciato l'arco di parabola sul foglio di plastica che, quindi, si increspa leggermente, lasciando che si percepisca al tatto.
Le schede guida, riguardanti la prima fase del lavoro di gruppo e relativa sia al parabolografo a filo che a quello di Cavalieri, seguono una linea comune per entrambi: descrizione e funzionamento delle macchine e riconoscimento della curva tracciata.
Entrambi i protocolli sono composti da quattro domande identiche, eccetto per la seconda che si differenzia per la descrizione del funzionamento dello strumento.
I quesiti sono:

1. Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni sua parte. Come pensate che si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

2. Inserite una mina all'interno del portamine e, applicando una leggera pressione, tracciate la curva. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma assume?

   Per il parabolografo a filo la seconda domanda diventa:

*2. Mantenendo il filo teso e accostato all'asta verticale della macchina con la punta di una matita, fate scorrere il lato orizzontale della macchina sulla guida rettilinea vincolata al piano del modello. Ripetete ora lo stesso procedimento posizionando la squadra a sinistra del perno centrale fissato al piano. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma ha?

3. Quali differenze e quali similitudini riuscite a trovare con le curve che già conoscete? Elencatele qui sotto.

4. Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina? Realizzate un elenco in cui per ogni oggetto considerato specificate se questo varia oppure no (osservate in particolare segmenti, angoli, lunghezze, ecc.). Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete affianco il suo valore. Se invece pensate che vari, riportate almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

In entrambe le schede, i primi due quesiti hanno il duplice scopo di spiegare il funzionamento delle macchine in esame e di stimolare gli alunni ad argomentare le loro idee riguardo alla natura della curva.
La terza domanda costruisce collegamenti tra la curva tracciata e le altre curve già conosciute, in particolare la circonferenza e l'ellisse, di cui si era parlato nella lezione precedente.
Infine il quarto ed ultimo quesito, relativo alla prima parte della scheda guida, prende il posto della tabella della terza domanda della scheda sull'ellissografo a filo (si veda pagina 93): emergono alcune caratteristiche che non variano durante il movimento delle due macchine, come ad esempio per il parabolografo a filo la lunghezza del filo inestensibile, mentre per quello di Cavalieri l'angolo retto formato dalle aste scanalate con il vertice nel portamina.
Le domande sono state distribuite su due fogli (Figure 3.21): la prima domanda occupa un intero foglio, per permettere ai ragazzi un'esplorazione libera e diretta della macchina in esame (con i relativi disegni), la seconda e la terza sono state collocate sulla facciata del secondo foglio, bene distanziate tra loro, mentre la quarta si trova sulla facciata posteriore del secondo foglio, per lasciare spazio alla costruzione di un'eventuale tabella.
L'adattamento delle consegne cartacee per Sara è avvenuto in formato digitale (Figure 3.22).È stato creato un file in WORD in cui sono state scritte consequenzialmente tutte e quattro le domande: in questo modo la ragazza sarebbe potuta intervenire in totale autonomia modificando il file secondo le sue esigenze (esattamente come per la scheda relativa all'ellissografo a filo).

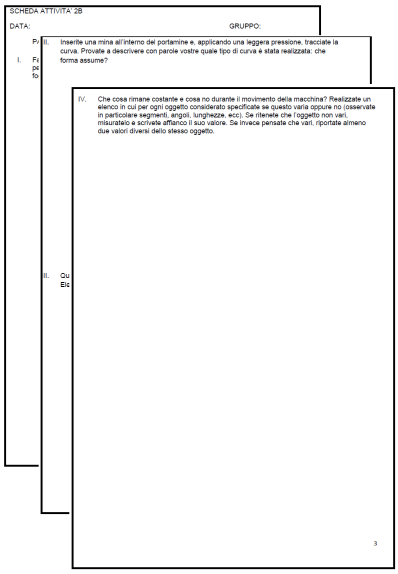
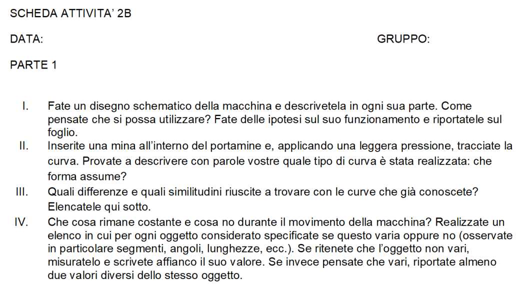


Figura 3.21: Le due pagine relative alla prima parte dell'attività con il parabolografo di Cavalieri.



SCHEDA ATTIVITA' 2B

DATA: GRUPPO:

PARTE 1

I. Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni sua parte. Come pensate che si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.
II. Inserite una mina all'interno del portamine e, applicando una leggera pressione, tracciate la curva. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma assume?
III. Quali differenze e quali similitudini riuscite a trovare con le curve che già conoscete? Elencatele qui sotto.
IV. Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina? Realizzate un elenco in cui per ogni oggetto considerato specificate se questo varia oppure no (osservate in particolare segmenti, angoli, lunghezze, ecc.). Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete affianco il suo valore. Se invece pensate che vari, riportate almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

Figura 3.22: Il file usato da Sara e relativo alla prima parte dell'attività con il parabolografo di Cavalieri.

Confronto tra due gruppi

Tra la prima e la seconda parte delle schede guida sui due parabolografi, si è scelto di fare interagire i gruppi, accoppiando ciascuno dei quattro aventi il parabolografo a filo con uno dei quattro che aveva lavorato con quello di Cavalieri. Il gruppo di Sara si è quindi unito al gruppo accanto, che aveva in esame il parabologarfo a filo.
É stato consegnato loro un parabolografo a filo adattato, per permettere alla ragazza non vedente di provare liberamente la macchina e riconoscere la curva tracciata.
Il gruppo allargato, quindi, possedeva sia un parabolografo di Cavalieri adattato (si veda la Figura 3.18 a pagina 101) e sia uno a filo adattato (Figura 3.18 a pagina 101): in questo modo si sono promosse l'integrazione e l'autonomia

dell'alunna disabile all'interno del gruppo classe, come spiegato nella Sezione 1.3.
La discussione si è aperta con la spiegazione del funzionamento della macchina a filo: la descrizione è stata dettagliata e ne è stato mostrato il funzionamento. Si è ritenuto opportuno che ognuno dei membri del gruppo opposto provasse personalmente lo strumento, mentre gli altri si sono limitati ad osservare. Si è passato all'analisi del parabolografo di Cavalieri: così come per l'altra macchina, anche in questo caso i ragazzi sono intervenuti, chiedendo chiarimenti ai membri del gruppo di Sara se non avevano compreso qualcosa. Tutti gli studenti sono entrati in contatto con entrambi gli strumenti ed hanno fatto confronti tra di essi e tra le curve che tracciano.

Lavoro di gruppo - Parte II

I quesiti dell'ultima sezione del parabolografo di Cavalieri sono cinque: nel formato cartaceo sono distribuiti (ben distanziati gli uni dagli altri) in due fogli, mentre a Sara è stato consegnato un ulteriore file in WORD in cui vi era una lista di domande, senza interruzioni o linee di comando vuote.
Le domande differiscono a seconda che siano riferite al parabolografo a filo oppure quello di Cavalieri. L'obiettivo della seconda fase del laboratorio è quello di approfondire le leggi matematiche che stanno alla base del corretto funzionamento delle macchine.
A queste schede sono allegate due immagini schematiche a colori relative alle macchine in esame, al fine di semplificare i riferimenti alle singole componenti degli strumenti. A Sara sono state consegnate una stampa e delle istruzioni eseguite con la Minolta e la dattilobraille.
Le domande relative alla seconda parte della scheda del parabolografo di Cavalieri sono:

5. Fissate la mina in un punto preciso. Individuate a quali elementi corrispondono sulla macchina gli oggetti colorati nel disegno (si veda la Figura 3.23; il disegno in Figura 3.24 è stato consegnato solamente a Sara), poi elencateli di seguito, spiegando con parole vostre a cosa corrisponde ciascun colore.

6. Considerate tutti i triangoli che compongono la figura: misurate tutti gli elementi che li formano (lati, angoli, ecc). Spostate la mina e ripetete le misurazioni. Cosa notate?

7. Calcolate l'area del quadrato di lato celeste e l'area del rettangolo con lati verde e rosso. C'è una relazione tra queste due aree? Se si scrivetela.

8. Se avete trovato una relazione al punto precedente, provate a dimostrare perché è valida.

9. Provate a tradurre questa relazione in un'equazione cartesiana, scegliendo il sistema di riferimento più comodo, a vostro piacimento.

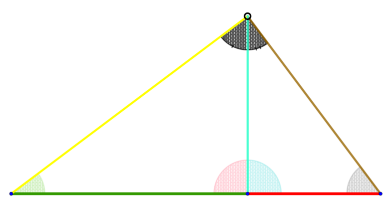


Figura 3.23: Disegno schematico a colori del parabolografo di Cavalieri.

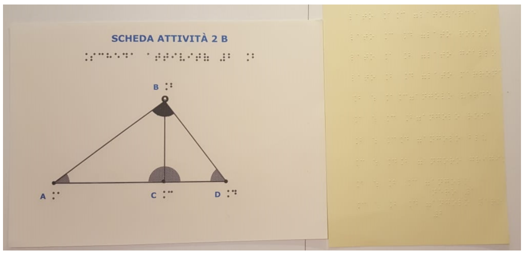


Figura 3.24: Stampa Minolta del disegno schematico del parabolografo, con relative istruzioni.

La quinta domanda riguarda l'individuazione delle corrispondenze disegno-macchina, e la richiesta è quella di specificare a quale colore è associato ciascun oggetto sulla macchina. In questo modo si agevoleranno i riferimenti successivi alle varie componenti del parabolografo.
In riferimento al disegno consegnato in classe (ovvero alla Figura 3.23), è stata creata la stampa in rilievo per Sara, accompagnata da un foglio in cui sono indicati i colori relativi ad ogni elemento del triangolo: sono stati utilizzati sia la stampante Minolta (per la riproduzione della figura geometrica), sia la dattilobraille (per il testo-consegna).
Per facilitare la scrittura matematica in Braille (troppo lunga ed impegnativa, come spiegato nella Sezione 1.5.3), si è pensato di scrivere direttamente

nel disegno tutti i vertici dei triangoli: A, B, C, D. L'identificazione dei cateti e degli angoli della figura risulta, così, più immediata. Riportiamo in Figura 3.25 la consegna in Braille con la relativa traduzione.

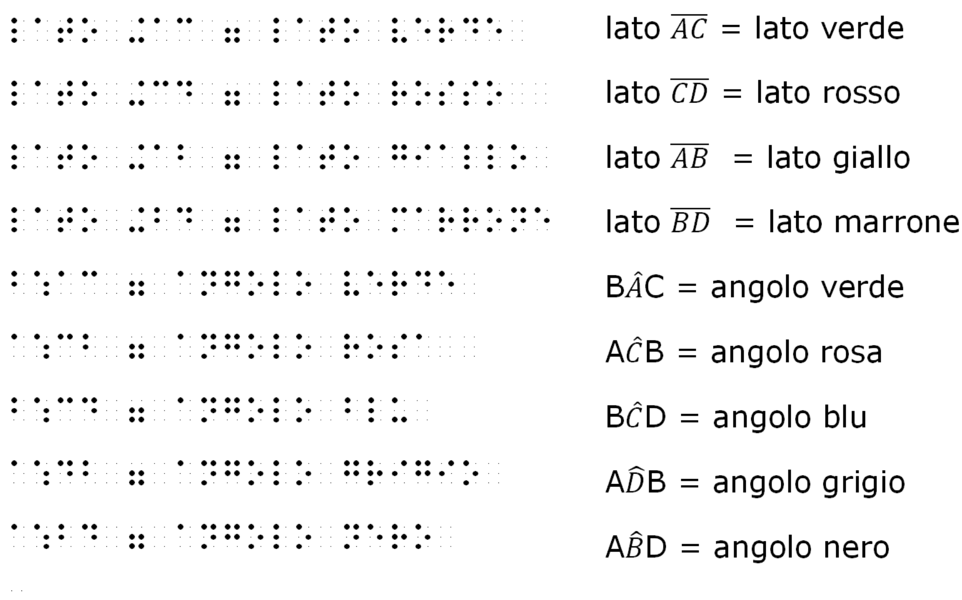


Figura 3.25: Testo in Braille con traduzione in nero a destra.

Un'alternativa alla stampa in Braille sarebbe potuto essere il file WORD contenete le stesse direttive: si è scelto, questa volta, di optare per il cartaceo, e non per il digitale, in quanto la ragazza non vedente avrebbe identificato più velocemente le parti delle figure in rilievo con accanto la consegna stampata, anziché passare continuamente da PC a disegno in rilievo.
La sesta domanda focalizza l'attenzione su ciò che non varia durante il movimento: nonostante il moto, il triangolo principale che compone la macchina rimane sempre un triangolo rettangolo. Questo fatto sarà fondamentale per applicare, nel seguito, il secondo teorema di Euclide.
Il settimo e l'ottavo quesito focalizzano l'attenzione sulla relazione quadratica che risulta dal secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo che compone lo strumento. Riferendosi alla Figura 3.24, il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo ABC afferma che

$$BC^2 = AC \cdot CD. \tag{3.2}$$

L'ultima domanda costituisce un collegamento tra piano sintetico e piano analitico, lasciando completa libertà al gruppo di scelta del riferimento cartesiano più comodo. In conclusione, gli strumenti utilizzati dal gruppo di Sara che ha in esame proprio il parabolografo di Cavalieri, sono stati: due fogli relativi alla seconda parte della scheda guidata (in Figura 3.26), un'immagine a colori (Figura 3.28), il file .DOC relativo alla scheda (Figura 3.27 e la stampa in Minolta, con le relative istruzioni (Figura 3.29).

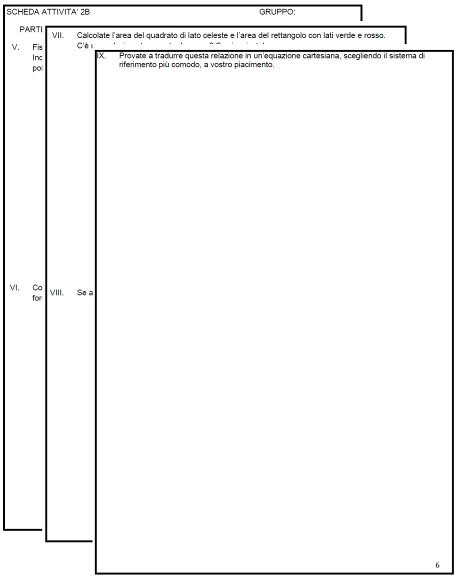
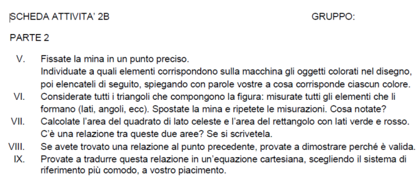


Figura 3.26: Le due pagine relative alla seconda parte dell'attività.



SCHEDA ATTIVITA' 2B GRUPPO:

PARTE 2

V. Fissate la mina in un punto preciso.
Individuate a quali elementi corrispondono sulla macchina gli oggetti colorati nel disegno, poi elencateli di seguito, spiegando con parole vostre a cosa corrisponde ciascun colore.
VI. Considerate tutti i triangoli che compongono la figura: misurate tutti gli elementi che li formano (lati, angoli, ecc). Spostate la mina e ripetete le misurazioni. Cosa notate?
VII. Calcolate l'area del quadrato di lato celeste e l'area del rettangolo con lati verde e rosso. C'è una relazione tra queste due aree? Se si scrivetela.
VIII. Se avete trovato una relazione al punto precedente, provate a dimostrare perché è valida.
IX. Provate a tradurre questa relazione in un'equazione cartesiana, scegliendo il sistema di riferimento più comodo, a vostro piacimento.

Figura 3.27: File usato da Sara relativo alla seconda parte dell'attività.

Da queste immagini, si possono notare le differenze che ci sono tra gli ausili didattici usati da un normododato e un non vedente: le figure, i colori e le scritte (relativi all'aspetto sensoriale della vista) sono sostituiti con strumenti che esaltano la percezione aptica (come le stampe in rilievo della Minolta), in riferimento alla Sezione 1.6.1, e l'immediatezza della fruizione degli ausili dell'alunno vedente viene rimpiazzata dall'analisi più lenta (e a

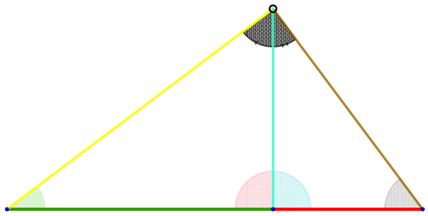


Figura 3.28: Immagine a colori del parabolografo di Cavalieri.

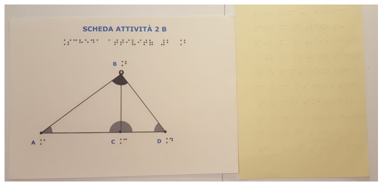


Figura 3.29: Immagine in rilievo del parabolografo di Cavalieri con relative istruzioni (stampe in Minolta).

volte più accurata) che esercita il tatto della ragazza cieca.
Anche durante questa attività, così come per il laboratorio sull'ellisse, sono stati forniti a Sara un goniometro e una squadra con segnalazioni tattili, come in Figura 1.12 a pagina 31, per rispondere alle domande in cui è richiesta una misurazione diretta, come la quarta e la sesta.

Scheda guida Parti - Extra

Per completezza, forniamo anche le ultime 5 domande relative alla scheda guida del parabolografo a filo:

5. Individuate a quali elementi corrispondono sulla macchina gli oggetti colorati nel disegno (si veda la Figura 3.30), poi elencateli di seguito, spiegando con parole vostre a cosa corrisponde ciascun colore.

6. Quanto è lungo il filo che compone la macchina, misurato partendo dal punto verde al punto rosa? Quanto è lunga l'asta arancione nella macchina misurata partendo dal punto verde a quello giallo? Misurateli e confrontateli.

7. Misurate sulla macchina la distanza tra il punto celeste e la retta nera. Poi quella tra il punto celeste e quello rosa. C'è una relazione tra queste due distanze? Se sì, scrivila.

8. Se avete trovato una relazione al punto precedente, provate a dimostrare perché è valida.

9. In caso affermativo provate a tradurre questa relazione in un'equazione cartesiana, scegliendo il sistema di riferimento più comodo, a vostro piacimento.

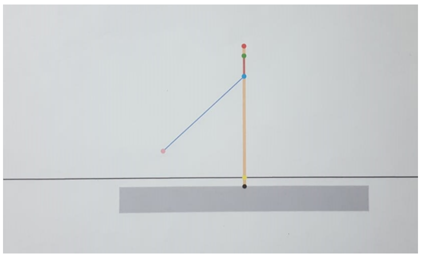


Figura 3.30: Disegno schematico a colori del parabolografo a filo.

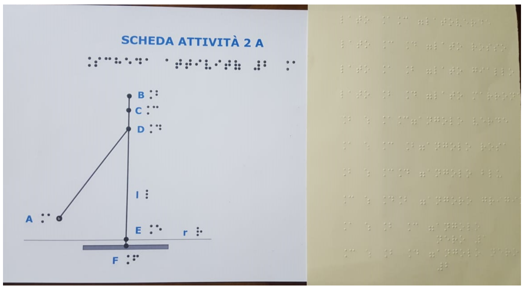


Figura 3.31: Stampa Minolta del disegno schematico del parabolografo, con relative istruzioni.

L'adattamento ai non vedenti dell'immagine a colori è riportato nella Figura 3.31. Si è deciso di adeguare anche tutta la scheda relativa al parabolografo a filo, nonostante si fosse già deciso di assegnare al gruppo di Sara il parabolografo di Cavalieri, nell'ottica di inserimento e uguaglianza di diritti scolastici dei disabili, in riferimento alla Sezione 1.3 (se avesse voluto affrontare quest'attività, Sara avrebbe dovuto avere tutti i mezzi adattati e adeguati).
I quesiti presenti nella seconda parte del parabolografo a filo si discostano da quelli proposti per il parabolografo di Cavalieri, in quanto l'obiettivo di questa fase di laboratorio è quello di approfondire le leggi matematiche che stanno alla base del corretto funzionamento delle macchine. La quinta domanda, in riferimento all'immagine a colori della macchina, ha lo scopo di agevolare il passaggio di schematizzazione da oggetto concreto ad immagine astratta (esattamente come la domanda 5 per il parabolografo di Cavalieri a pagina 106). Le tre domande successive richiedono di effettuare misurazioni sulla macchina e di trarne conclusioni in merito: ciò serve ad individuare

la proprietà caratterizzante della curva che, in questo caso, riferendosi alla Figura 3.31, risulta essere

$$DA = DE, \tag{3.3}$$

dove D è un generico punto della curva (descritto dalla punta della matita nell'utilizzo della macchina), A è il fuoco (perno fisso al centro) ed E è l'intersezione tra la retta passante per D e perpendicolare alla direttrice.
La nona domanda, analogamente a quanto visto per l'ellissografo a filo e al parabolografo di Cavalieri, riguarda l'individuazione dell'equazione cartesiana della parabola.
Si è deciso di creare una terza parte facoltativa per ciascuna scheda guida relativa ai parabolografi, da effettuare, eventualmente, una volta concluso il nono quesito. Si tratta di una singola domanda, relativa a ciascuna macchina.
Per il parabolografo di Cavalieri il quesito è:

10. Ragionate sulle possibili modifiche alla macchina:
    - provate a modificare la lunghezza del lato rosso. Come diventerebbe la curva rispetto alla prima che avete disegnato?
    - come cambierebbe la curva tenendo fissi i lati rosso e verde? Provate a fare delle ipotesi e riportatele sul foglio.

Per il parabolografo a filo la domanda è la seguente:

10. ragionate sulle possibili modifiche alla macchina:
    - cambiate il perno sul quale è agganciato il filo nell'asta verticale della macchina. Come cambia la curva tracciata?
    - come cambierebbe la curva avvicinando sempre di più il punto rosa alla retta nera? Provate a pensarci e a fare delle ipotesi.

Entrambi i quesiti lavorano sulle possibili modifiche strutturali da apportare alle macchine. Questi cambiamenti non sono attuabili nel concreto: sono

richieste le capacità di astrazione e di visualizzazione degli studenti (abilità spesso in possesso dei non vedenti, si veda la Sezione 1.2).
Queste ultime parti delle schede guida sono in formato cartaceo: ogni domanda occupa un singolo foglio. L'adattamento presentato a Sara consiste nel file .WORD con il relativo quesito.
Occorre precisare che questi ultimi protocolli non sono indispensabili per il raggiungimento dell'obiettivo che si pone il laboratorio (ovvero di studiare le macchine e la parabola da un punto di vista sintetico, per avviarsi alla descrizione analitica) ma risulta utile per consolidare il concetto per cui ogni componente di una macchina matematica ha un ruolo ben preciso per il suo funzionamento.

3.3.3 Terza lezione: riassunto dell'attività laboratoriale

La terza ed ultima lezione era stata originariamente pensata come una ricapitolazione conclusiva di tutta l'attività, ma, poiché le tempistiche del secondo laboratorio si sono allungate più del previsto, si è deciso di strutturare quest'ultima ora in due parti:

- discussione collettiva sul nono quesito dei parabolografi.
  É stato corretto alla lavagna il nono quesito di entrambe le schede relativo a tutti e due i parabolografi: si è mostrato come ricavare l'equazione generale della parabola, separatamente per le due macchine e fissando gli assi cartesiani in modo opportuno. In questo modo si è riuscito a provare analiticamente ai ragazzi che le curve tracciate dalle due macchine sono effettivamente la stessa.
  Sara ha potuto seguire la spiegazione attraverso l'uso dei due parabolografi adattati, il piano cartesiano in rilievo e il software di calcolo LAMBDA.

- ricapitolazione di tutta l'attività laboratoriale.
  Si sono riportate all'attenzione tutte le curve esaminate durante i due

laboratori svolti, riassumendone le proprietà che le caratterizzano. Si è poi introdotto il concetto di conica: tutte le curve viste fino a qui assumono un'importanza notevole in quanto si ottengono come sezioni di un cono. Per mostrare meglio a cosa ci stavamo riferendo, si è realizzato un cono con il DAS, su cui sono state incise le quattro coniche. Partendo dall'analisi di questo solido, si è fatta notare la presenza di un'altra conica di cui ancora non si era parlato: l'iperbole. Si è mostarto ai ragazzi il funzionamento dell'iperbolografo a filo, realizzato appositamente per questa occasione.
Tutti i dispositivi esposti in questa lezione sono stati realizzati appositamente per l'utilizzo da parte dei non vedenti. Sara ha potuto usufruirne con successo.

Discussione sui parabolografi

La prima parte della terza lezione ha richiesto 40 minuti (un po' più del previsto) ed è stata dedicata ad una sessione di discussione collettiva sulle risposte date alle domande numero 9 delle schede sui parabolografi. Gli alunni hanno avuto difficoltà nella risoluzione di tali quesiti, quindi data la rilevanza didattica della richiesta, si è deciso di chiarire i dubbi emersi.
Si è mostrato come ricavare l'equazione generale della parabola tracciata, separatamente per le due macchine, fissando gli assi cartesiani in maniera opportuna, in modo che le due equazioni ottenute risultassero identiche a meno di scambiare la x con la y.
Per il parabolografo a filo si sono scelti come asse y il diametro della parabola e come asse x la retta ortogonale a questa e passante per il vertice; invece per il parabolografo di Cavalieri si sono scelti come asse x la scanalatura della macchina e come asse y la retta perpendicolare alla scanalatura e passante per il vertice. Tali scelte sono state fatte tenendo conto delle alternative proposte dai gruppi che sono riusciti a procedere nella risoluzione dei quesiti. Così si è potuto provare analiticamente che le curve tracciate dai due diversi parabolografi sono effettivamente la stessa.

La spiegazione è avvenuta in modo tradizionale: i ragazzi annotavano sui propri quaderni ciò che veniva scritto e disegnato sulla lavagna. Sara, invece, ha utilizzato le macchine matematiche adattate per ricostruire le curve in esame (Figure 3.32 e 3.34), il piano cartesiano in rilievo per posizionare gli assi cartesiani (Figure 3.33 e 3.35) ed il software LAMBDA per la scrittura delle equazioni cartesiane (Figura 3.36). In questa fase, sono state fondamentali le stampe in Minolta dei disegni raffiguranti i parabolografi schematizzati: grazie a queste riproduzioni, la ragazza non vedente ha potuto trovare con più facilità i punti e le rette utilizzati per l'individuazione delle curve. Durante questo lavoro è stata aiutata dall'insegnante di sostegno, intervenuto soprattutto per velocizzare il cambio dei dispositivi ausiliari, in riferimento alla Sezione 1.3.2.

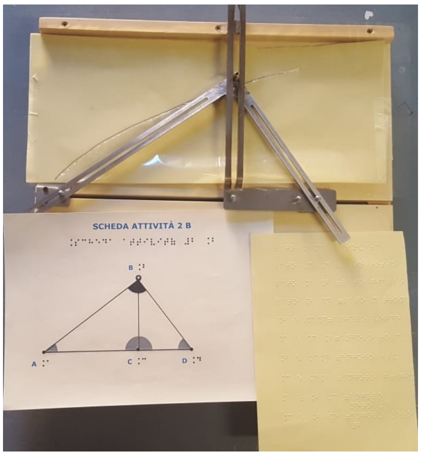


Figura 3.32: Parabolografo di Cavalieri adattato.

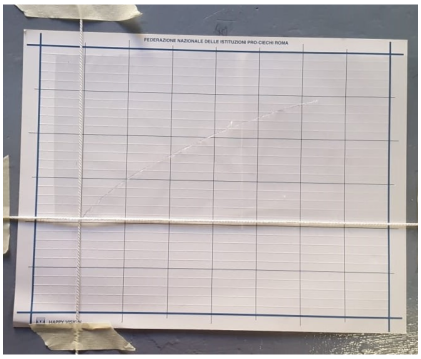


Figura 3.33: Curva tracciata dal parabolografo di Cavalieri sul piano in rilievo.

Una volta tracciata la curva sul parabolografo adattato, è stato sufficiente prendere il foglio di plastica, su cui vi era l'incisione della curva, e adagiarlo sul piano cartesiano in rilievo. A questo punto Sara ha potuto individuare gli assi cartesiani con dei cordoncini spessi, fissando tutto con lo scotch. Gli ausili didattici in suo possesso hanno reso possibile alla ragazza non vedente

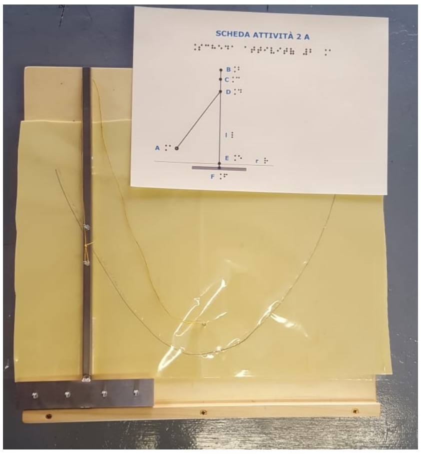


Figura 3.34: Parabolografo a filo adattato.

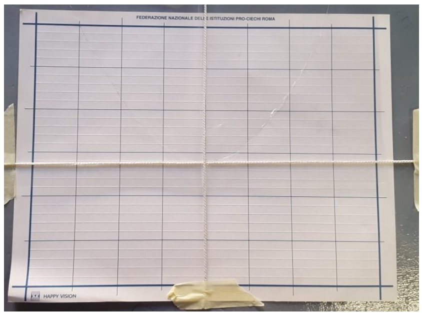


Figura 3.35: Curva tracciata dal parabolografo a filo sul piano in rilievo.

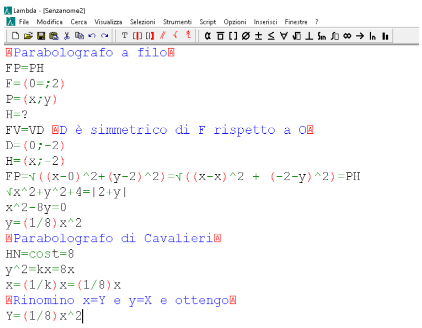


Figura 3.36: Equazioni cartesiane scritte in LAMBDA.

di seguire tutta la lezione al pari dei compagni di classe.

Riassunto finale

La seconda parte della terza lezione è stata dedicata alla revisione dei risultati notevoli e delle attività laboratoriali svolte nelle sessioni precedenti, ponendo l'attenzione su tutte le curve analizzate e riassumendo le proprietà che le caratterizzano.È stata impostata una discussione guidata che partisse dalla puntualizzazione delle definizioni di circonferenza ed ellisse, passando poi a quella di parabola, facendo in modo che emergessero, dalle osservazione dei ragazzi, le proprietà che sfruttano le macchine matematiche da loro analizzate.
Con gli obiettivi di motivare lo studio effettuato su queste tre curve specifiche e di uniformare il discorso, è stato creato un cono con il DAS (Figura 3.37), su cui sono state incise le sezioni coniche: le curve, viste fin qui, si ottengono tagliando il cono con piani di diversa inclinazione. L'oggetto è stato dipinto con diversi colori, per mostrare meglio visivamente ciò che stavamo dicendo; grazie alle incisioni nere, ciascuna corrispondente a una curva diversa, Sara ha potuto comprendere ciò che stava accadendo, toccando il materiale specifico realizzato (si veda la Sezione 1.5.2).
Analizzando il cono, si è potuta presentare l'iperbole, l'altra conica di cui ancora non si era parlato.È stata brevemente introdotta la proprietà caratterizzante (il valore assoluto della differenza delle distanze di un punto qualsiasi della curva dai due fuochi rimane costante) e si è mostrato il funzionamento dell'iperbolografo a filo (Figura 3.38), appositamente realizzato per questa occasione. Questa macchina è stata costruita direttamente per i non vedenti: sulla base in legno, è stato incollato un sottile foglio di gomma, in modo da fungere come ausilio per i non vedenti ma, allo stesso tempo, che non ostacolasse la fruizione ai normodotati.

Figura 3.37: Cono in Das con incise le 4 sezioni coniche.

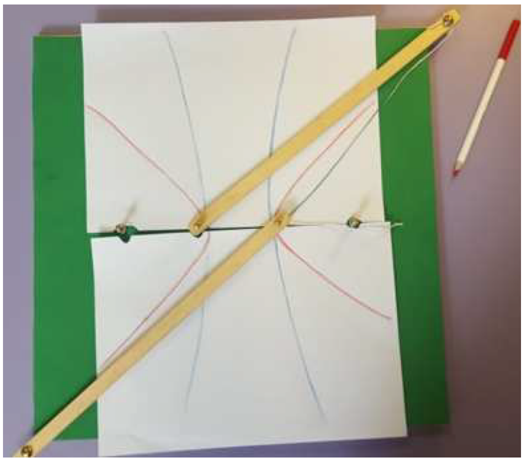


Figura 3.38: Iperbolografo a filo.

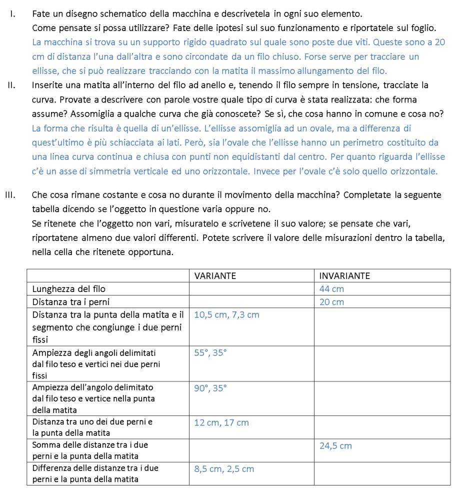
Capitolo 4

Analisi in termini di mezzi semiotici di oggettivazione

In questo capitolo verranno prese in esame le risposte date da Sara e dal suo gruppo in merito ai quesiti delle schede guida proposte durante la sperimentazione in classe. I dati su cui si baserà l'analisi sono le registrazioni audio delle lezioni, i protocolli compilati dagli studenti e l'osservazione diretta mia e della mia collega Alessia Raggi.
Il tema centrale del laboratorio proposto a Sara è la presentazione di alcune coniche, attraverso l'uso delle macchine matematiche. Il lavoro è stato diviso in tre principali percorsi, seguendo l'organizzazione in fasi, descritta in dettaglio nella Sezione 3.3: prima lezione, incentrata sull'esplorazione dell'ellisografo, seconda lezione, con l'uso del parabolografo di Cavalieri, e terza lezione, attraverso l'introduzione del cono e dell'iperbolografo a filo.
La progettazione del laboratorio è stata ispirata alla teoria di Radford (analizzata nella Sezione 1.4.1), soprattutto per quello che riguarda la costruzione degli strumenti e degli artefatti, usati come mezzi semiotici di oggettivazione per rendere accessibili a Sara gli enti della geometria. In particolare l'idea di una "matematica tattile" si è ispirata alle ricerche e alle sperimentazioni delle professoresse Anna Capietto e Maria Grazia Bartolini Bussi, in [2] e [5].

4.1 Prima lezione: ellissografo a filo

I mezzi semiotici principalmente usati sono stati: la macchina matematica, il linguaggio naturale, l'esplorazione tattile, il software numerico LAMBDA, una squadra ed un compasso con segnalazioni tattili.
La Figura 4.1 rappresenta la prima parte della scheda guida sull'ellissografo svolta da Sara, insieme al suo gruppo di laboratorio. Le risposte sono state evidenziate in blu.
Da un'analisi condotta direttamente sulle schede in possesso dei gruppi, si evince come le stesse risposte data da Sara appaiono anche nei fogli del suo gruppo: il lavoro svolto insieme ai compagni di classe non ha escluso la ragazza disabile, che ha partecipato attivamente, mostrando, in alcune circostanze, di avere anche un notevole intuito.



I. Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni suo elemento.
Come pensate si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.
La macchina si trova su un supporto rigido quadrato sul quale sono poste due viti. Queste sono a 20 cm di distanza l'una dall'altra e sono circondate da un filo chiuso. Forse serve per tracciare un ellisse, che si può realizzare tracciando con la matita il massimo allungamento del filo.

II. Inserite una matita all'interno del filo ad anello e, tenendo il filo sempre in tensione, tracciate la curva. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma assume? Assomiglia a qualche curva che già conoscete? Se sì, che cosa hanno in comune e cosa no?
La forma che risulta è quella di un'ellisse. L'ellisse assomiglia ad un ovale, ma a differenza di quest'ultimo è più schiacciata ai lati. Però, sia l'ovale che l'ellisse hanno un perimetro costituito da una linea curva continua e chiusa con punti non equidistanti dal centro. Per quanto riguarda l'ellisse c'è un asse di simmetria verticale ed uno orizzontale. Invece per l'ovale c'è solo quello orizzontale.

III. Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina? Completate la seguente tabella dicendo se l'oggetto in questione varia oppure no.
Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivetene il suo valore; se pensate che vari, riportatene almeno due valori differenti. Potete scrivere il valore delle misurazioni dentro la tabella, nella cella che ritenete opportuna.

	VARIANTE	INVARIANTE
Lunghezza del filo		44 cm
Distanza tra i perni		20 cm
Distanza tra la punta della matita e il segmento che congiunge i due perni fissi	10,5 cm, 7,3 cm	
Ampiezza degli angoli delimitati dal filo teso e vertici nei due perni fissi	55°, 35°	
Ampiezza dell'angolo delimitato dal filo teso e vertice nella punta della matita	90°, 35°	
Distanza tra uno dei due perni e la punta della matita	12 cm, 17 cm	
Somma delle distanze tra i due perni e la punta della matita		24,5 cm
Differenza delle distanze tra i due perni e la punta della matita	8,5 cm, 2,5 cm	

Figura 4.1: Risposte (in blu) date da Sara relativamente alla prima parte della scheda sull'ellissografo.

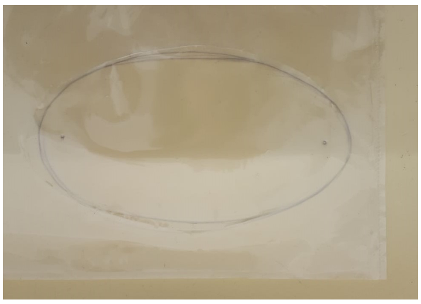


Figura 4.2: Disegno relativo alla seconda domanda della scheda dell'ellissografo.

Riportiamo di seguito la prima domanda della scheda e la risposta di Sara:

1. Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni suo elemento. Come pensate si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

   «La macchina si trova su un supporto rigido quadrato sul quale sono poste due viti. Queste sono a 20 cm di distanza l'una dall'altra e sono circondate da un filo chiuso. Forse serve per tracciare un ellisse, che si può realizzare tracciando con la matita il massimo allungamento del filo.»

Notiamo subito che nella risposta vi è il termine "ellisse", che non dovrebbe essere presente nel dizionario di una studentessa a inizio terza liceo linguistico: dalle registrazioni audio, infatti, risulta che i componenti del gruppo si sono accorti dell'etichetta attaccata sul bordo della macchina, ricoperta non troppo bene dai fogli e riportante il nome "ellissografo a filo". A causa di ciò, tutto il gruppo si è lasciato ispirare dall'etichetta e ha cercato di ricavarne il nome della stessa curva.
Il gruppo di Sara è stato l'unico a non effettuare il disegno richiesto sul foglio della scheda, così come la stessa Sara non ha riportato il disegno sulla pagina in WORD. Per far fronte a questa mancanza, hanno pensato di scrivere una risposta ben dettagliata: usando il sussidio specifico per disegno (in Figura 4.2) e descrivendo attentamente l'immagine, i componenti del gruppo di Sara sono coscienziosamente venuti incontro alle esigenze della compagna non vedente, raggiungendo l'obiettivo di inclusione degli alunni con disabilità all'interno della classe (si veda la Sezione 1.3).
L'esplorazione tattile da parte di Sara, in seguito alla formulazione di ipotesi sul funzionamento della macchina, è iniziata seguendo la superficie dello strumento ed è proseguita con l'individuazione dei dettagli e delle parti più significative, come i due perni ed il filo annodato. Alcuni ragazzi del suo gruppo hanno pensato che l'ellissografo servisse per disegnare triangoli, in quanto tirando il filo e tenendolo teso, vedevano materializzata questo tipo di figura; subito dopo Sara ha osservato che togliendo il filo da uno dei due

perni e lasciandolo vincolato solo all'altro, veniva fuori una circonferenza, perché «il raggio [distanza dalla matita all'unico perno] rimane costante». Tuttavia, ha concluso che la macchina non poteva tracciare le circonferenze, in quanto, nel disegnarle, con la punta della matita sarebbe uscita dal piano in legno. Da questo, si evince come la ragazza non vedente abbia molta dimestichezza nell'esplorazione tattile, più dei suoi colleghi vedenti, anticipando le domande successive: Sara ha incominciato fin da subito ad esaminare, attraverso movimenti fini, gli oggetti che compongono lo strumento, arrivando a formulare ipotesi diverse anche su una sua possibile trasformazione (sesto quesito). Dopo poco, tutto il gruppo è arrivato ad immaginare il reale funzionamento dell'ellissografo.
Leggendo il secondo quesito, con la relativa risposta di Sara, qui riportato

2. Inserite una matita all'interno del filo ad anello e, tenendo il filo sempre in tensione, tracciate la curva. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma assume? Assomiglia a qualche curva che già conoscete? Se sì, che cosa hanno in comune e cosa no?

   «La forma che risulta è quella di un'ellisse. L'ellisse assomiglia ad un ovale, ma a differenza di quest'ultimo è più schiacciata ai lati. Però, sia l'ovale che l'ellisse hanno un perimetro costituito da una linea curva continua e chiusa con punti non equidistanti dal centro. Per quanto riguarda l'ellisse c'è un asse di simmetria verticale ed uno orizzontale. Invece per l'ovale c'è solo quello orizzontale.»

si evince che la ragazza è riuscita in totale autonomia a tracciare la curva. Ha capito fin da subito che si trattava di un ellisse: ha osservato la somiglianza con una forma ovale, intendendo una forma ad uovo, e ha fatto notare che la differenza principale tra l'ellisse e l'ovale risiede nel numero di assi di simmetria che hanno.

	VARIA	NON VARIA
Lunghezza del filo		44 cm
Distanza tra i perni		20 cm
Distanza tra la punta della matita e la retta passante per i due perni	10,5 cm, 7,3 cm	
Ampiezza degli angoli delimitati dal filo teso e vertici nei due perni fissi	55°, 35°	
Ampiezza dell'angolo delimitato dal filo teso e vertice nella punta della matita	90°, 35°	
Distanza tra uno dei due perni e la punta della matita	12 cm, 17 cm	
Somma delle distanze tra i due perni e la punta della matita		24,5 cm
Differenza delle distanze tra i due perni e la punta della matita.	8,5 cm, 2,5 cm	

Tabella 4.1: Tabella relativa al terzo quesito della scheda sull'ellissografo, compilata da Sara (risposte in blu).

Analizzando anche le altre risposte a questa domanda, si nota come il gruppo di Sara sia stato uno dei pochi a fornire un'analogia con un ovale; la maggior parte dei ragazzi ha evidenziato uguaglianze con l'orbita terrestre e con la circonferenza. Da ciò emerge come l'alunna non vedente, essendo abile nell'esplorazione aptica, riesca a trovare più somiglianze con oggetti piccoli e concreti, come un uovo, anziché con oggetti di grandi dimensioni e difficili (o impossibili) da manipolare, come l'orbita terrestre.
La compilazione della Tabella 4.1 da parte di Sara, relativa al terzo quesito, è la seguente:

Le misurazioni riportate sono state fatte dalla ragazza non vedente at-

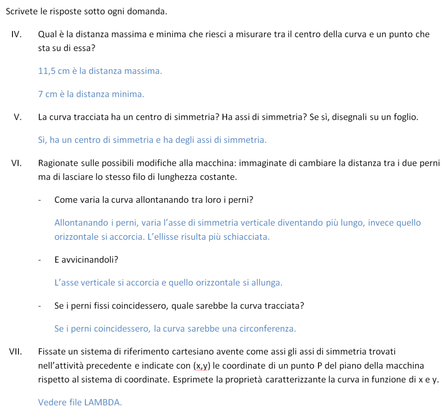
traverso una squadra e un goniometro con segnalazioni tattili, come in Figura 1.12 a pagina 31. Ciascun componente del gruppo ha svolto un paio di misurazioni: in particolare Sara ha calcolato la lunghezza del filo e la somma delle distanze tra i due perni e la punta della matita, mentre un'altra ragazza registrava tutti i risultati sul foglio di carta.
Sara ha voluto misurare spontaneamente anche l'ampiezza dell'angolo tra il filo e i due perni, facendosi aiutare da un ragazzo del gruppo: questi atteggiamenti mostrano, ancora una volta, come la ragazza disabile si sia ben inserita all'interno della classe. Concluse tutte le misurazioni, la ragazza non vedente si è fatta dettare velocemente i dati appena raccolti, trascrivendoli sul file in WORD (si veda la Tabella 3.3 a pagina 98 per le differenze tra il formato digitale e cartaceo delle domande).
Da un lato Sara ha mostrato molto entusiasmo nel lavoro inter pares, tanto da andare oltre lo svolgimento del suo compito di misurare solo 2 grandezze (apportando anche una misurazione in più, quella degli angoli). D'altro canto, però, l'aiuto fornitole per l'utilizzo del compasso tattile e il dettato della tabella da parte degli alunni vedenti hanno allungato le tempistiche dello svolgimento della prova (il gruppo di Sara è stato l'ultimo a finire la prima parte della scheda sull'ellissografo).
Inoltre questo gruppo è stato uno dei pochi ad individuare correttamente tutti gli invarianti: si evidenzia come ha risposto opportunamente al fatto che la somma delle distanze tra i due perni e la punta della matita non vari, mentre la differenza tra queste due distanze sì. Probabilmente l'esplorazione aptica da parte di Sara, che inevitabilmente impiega più tempo rispetto al solo uso della vista, e la dettatura di alcune misurazioni effettuate da parte dei componenti del suo gruppo, hanno sì rallentato la fine del lavoro, ma hanno anche comportato una maggiore accuratezza e precisione nelle risposte.
Sembra chiaro che per un gruppo con all'interno un disabile visivo serva più tempo per lo svolgimento di un compito, non per scarsa preparazione o mancanza di abilità, quanto per la difficile gestione logistica dei sussidi per non vedenti.

Durante la correzione collettiva, iniziata dopo la conclusione della prima parte della scheda guida, si è voluto porre l'attenzione sulla relazione che lega le proprietà invarianti esposte nella terza domanda: gli oggetti in questione sono

$$l = \text{lunghezza del filo}$$
$$b = \text{distanza tra i perni}$$
$$d_1, d_2 = \text{distanza tra i perni e la punta della matita.}$$

I ragazzi sono riusciti ad arrivare da soli alla relazione che li lega, cioè all'Equazione 3.1 di pagina 94.
Sara ha trascritto la proprietà utilizzando il software LAMBDA, aiutata dal docente di sostegno. In quel momento, la ragazza non vedente stava usando contemporaneamente più ausili didattici: la macchina matematica adattata, la squadra ed il goniometro tattili, il file .DOC per le risposte ai quesiti e il file LAMBDA per la scrittura della teoria matematica, esattamente come gli alunni normodotati, che hanno usufruito della macchina matematica, le squadre e i goniometri, i fogli della scheda e il quaderno. Tuttavia gli strumenti utilizzati da Sara sono più ingombranti dei dispositivi dei suoi compagni di classe (basti pensare alle dimensioni e al peso del computer rispetto a quelli dei fogli cartacei), e spesso richiedono anche più tempo per il loro impiego (ad esempio l'apertura di un foglio di calcolo con i software WORD e LAMBDA, da parte di un non vedente, avviene attraverso i comandi WINDOWS attivati dalla barra Braille e senza l'uso del mouse).
Proprio in quest'ottica emerge l'importanza dell'insegnate di sostegno durante lo svolgimento dell'attività, che permette, come in questo caso, non solo di correggere eventuali incomprensioni ed indirizzare il lavoro sulla via giusta, ma anche di ripetere e puntualizzare i concetti più importanti e significativi scritti alla lavagna o ripetuti in classe.
Riportiamo nella Figura 4.3 la seconda parte della scheda guida sull'ellissografo a filo compilata da Sara.

Le domande numero 4 e 5 non hanno destato particolari problemi. Le risposte di Sara vengono riportate di seguito:



Scrivete le risposte sotto ogni domanda.

IV. Qual è la distanza massima e minima che riesci a misurare tra il centro della curva e un punto che sta su di essa?

11,5 cm è la distanza massima.

7 cm è la distanza minima.

V. La curva tracciata ha un centro di simmetria? Ha assi di simmetria? Se sì, disegnali su un foglio.

Sì, ha un centro di simmetria e ha degli assi di simmetria.

VI. Ragionate sulle possibili modifiche alla macchina: immaginate di cambiare la distanza tra i due perni ma di lasciare lo stesso filo di lunghezza costante.

- Come varia la curva allontanando tra loro i perni?

  Allontanando i perni, varia l'asse di simmetria verticale diventando più lungo, invece quello orizzontale si accorcia. L'ellisse risulta più schiacciata.

- E avvicinandoli?

  L'asse verticale si accorcia e quello orizzontale si allunga.

- Se i perni fissi coincidessero, quale sarebbe la curva tracciata?

  Se i perni coincidessero, la curva sarebbe una circonferenza.

VII. Fissate un sistema di riferimento cartesiano avente come assi gli assi di simmetria trovati nell'attività precedente e indicate con (x,y) le coordinate di un punto P del piano della macchina rispetto al sistema di coordinate. Esprimete la proprietà caratterizzante la curva in funzione di x e y.

Vedere file LAMBDA.

Figura 4.3: Risposte (in blu) date da Sara relativamente alla seconda parte della scheda sull'ellissografo.

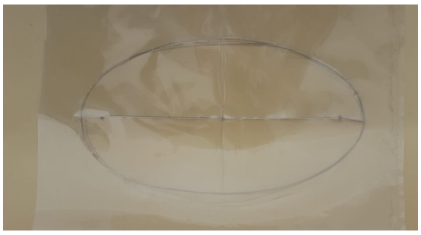


Figura 4.4: Disegno relativo alla seconda parte della scheda sull'ellissografo.

4. Qual è la distanza massima e minima che riesci a misurare tra il centro della curva e un punto che sta su di essa?

   «11,5 cm è la distanza massima. 7 cm è la distanza minima.»

5. La curva tracciata ha un centro di simmetria? Ha assi di simmetria? Se sì, disegnali su un foglio.

   «Sì, ha un centro di simmetria e ha degli assi di simmetria.»

Avendo già individuato gli assi di simmetria nella domanda numero 2, il gruppo di Sara li ha subito disegnati sul supporto adattato (come mostrato in Figura 4.4) e ha poi proceduto nell'individuazione del centro della curva e nella risposta al quesito precedente.
In particolare, la ragazza non vedente ha esplorato con entrambe le mani tutto il foglio di plastica: come prima cosa ha tracciato l'asse di simmetria orizzontale (passante per i due fuochi) con la squadra tattile, poi ha piegato

il foglio a metà, facendo combaciare perfettamente il bordo della figura e ripiegando l'asse maggiore su se stesso e quindi ha individuato anche il secondo asse. Il centro di simmetria è stato rilevato velocemente come punto di intersezione degli assi.
Il quarto quesito è stato risolto effettuando una serie di misurazioni da parte di un ragazzo vedente: come prima distanza è stata casualmente rilevata quella massima, poi sono state fatte altre misurazioni che riportavano numeri sempre più piccoli (quindi riconducibili alle distanze che si hanno man mano che ci si avvicina al semiasse minore), per poi concludere che la distanza minima era proprio quella dell'altro semiasse. Sara ha eseguito la verifica attraverso l'esplorazione aptica: utilizzando la squadra tattile, dopo aver toccato con tutte le dita delle mani, ha potuto constatare che il semiasse maggiore era lungo $11,5$ cm mentre quello minore 7 cm.
La risposta di Sara al sesto quesito risulta essere:

6. Ragionate sulle possibili modifiche alla macchina: immaginate di cambiare la distanza tra i due perni ma di lasciare lo stesso filo di lunghezza costante.

   - Come varia la curva allontanando tra loro i perni?

     «Allontanando i perni, varia l'asse di simmetria verticale diventando più lungo, invece quello orizzontale si accorcia. L'ellisse risulta più schiacciata.»

   - E avvicinandoli?

     «L'asse verticale si accorcia e quello orizzontale si allunga.»

   - Se i perni fissi coincidessero, quale sarebbe la curva tracciata?

«Se i perni coincidessero, la curva sarebbe una circonferenza.»

A fronte di quanto già visto e toccato prima, i ragazzi del gruppo, compreso Sara, hanno visualizzato la situazione mentalmente, analizzando come sarebbero cambiati gli assi di simmetria. Anche per quanto riguarda l'ultimo punto della domanda 6, tutti i componenti del gruppo sono arrivati a dire che sovrapponendo idealmente i perni, la curva tracciata sarebbe stata una circonferenza. Quando è stato chiesto a Sara di motivare la risposta, ha affermato che diventa una circonferenza perché «il punto è uno solo e il raggio diventa costante, lungo la metà del filo.»
Si è ritenuto, data la sicurezza con cui operativamente ha effettuato le sue scelte, che abbia interiorizzato le caratteristiche studiate sulla circonferenza e sull'ellisse e sia riuscita a generalizzarle, utilizzando termini opportuni come assi di simmetria e centro della curva.
L'ultimo quesito, con relativa risposta di Sara, cita solamente:

6. Fissate un sistema di riferimento cartesiano avente come assi gli assi di simmetria trovati nell'attività precedente e indicate con (x,y) le coordinate di un punto P del piano della macchina rispetto al sistema di coordinate. Esprimete la proprietà caratterizzante la curva in funzione di x e y.

«Vedere file LAMBDA.»

Il file .LAMBDA relativo alla scheda sull'ellissografo è riportato in Figura 3.16 a pagina 99.
Per questa domanda è stato consegnato a Sara il piano in rilievo: come prima cosa la ragazza ha fissato gli assi di riferimento, utilizzando due fili di cotone molto spessi e uno scotch, e poi ha riflettuto, insieme ai suoi compagni di laboratorio, su come posizionare la curva. Hanno convenuto di far coincidere il centro di simmetria con l'origine degli assi e di far giacere l'asse maggiore

sull'asse delle ascisse, come in Figura 3.15 a pagina 99.
Solo un gruppo ha compreso perfettamente la consegna ed è arrivato alla soluzione finale, mentre tutti gli altri (compresa Sara) hanno avuto bisogno di diversi chiarimenti. In particolare la ragazza non vedente ha avuto difficoltà nell'individuare il punto generico P da considerare: ha capito che si trattava di un punto giacente sulla curva, tuttavia ha cercato di assegnargli delle coordinate precise. Interrogata su quale fosse la proprietà caratterizzante della curva, la sua risposta non è stata immediata: sotto consiglio, ha dovuto consultare il file scritto al termine della discussione precedente per riuscire, infine, a concludere con la relazione trovata.
Il docente di sostegno ha assistito la ragazza non vedente in questa ultima fase di scrittura, facendole notare i passaggi più importanti da scrivere.

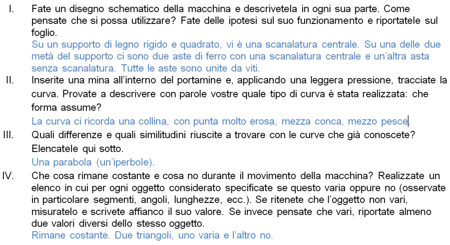
4.2 Seconda lezione: parabolografo di Cavalieri

I mezzi semiotici utilizzati in questo percorso laboratoriale sono stati: la macchina matematica, il linguaggio naturale, l'esplorazione tattile, il softrware WORD e una stampa in rilievo.
La prima parte della scheda guida sul parabolografo di Cavalieri in formato .DOC è riportata nella Figura 4.5, dove le risposte date da Sara sono evidenziate in blu.

Il primo quesito, che riguarda la descrizione e le ipotesi sul funzionamento della macchina, con la relativa risposta della ragazza non vedente è:

1. Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni sua parte. Come pensate che si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

«Su un supporto di legno rigido e quadrato, vi è una scanalatura centrale. Su una delle due metà del supporto ci sono due



I. Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni sua parte. Come pensate che si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.
Su un supporto di legno rigido e quadrato, vi è una scanalatura centrale. Su una delle due metà del supporto ci sono due aste di ferro con una scanalatura centrale e un'altra asta senza scanalatura. Tutte le aste sono unite da viti.

II. Inserite una mina all'interno del portamine e, applicando una leggera pressione, tracciate la curva. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma assume?
La curva ci ricorda una collina, con punta molto erosa, mezza conca, mezzo pesce.

III. Quali differenze e quali similitudini riuscite a trovare con le curve che già conoscete? Elencatele qui sotto.
Una parabola (un'iperbole).

IV. Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina? Realizzate un elenco in cui per ogni oggetto considerato specificate se questo varia oppure no (osservate in particolare segmenti, angoli, lunghezze, ecc.). Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete affianco il suo valore. Se invece pensate che vari, riportate almeno due valori diversi dello stesso oggetto.
Rimane costante. Due triangoli, uno varia e l'altro no.

Figura 4.5: Risposte (in blu) date da Sara relativamente alla prima parte della scheda sul parabolografo.

Figura 4.6: Disegno relativo alla seconda domanda della scheda del parabolografo di Cavalieri.

aste di ferro con una scanalatura centrale e un'altra asta senza scanalatura. Tutte le aste sono unite da viti.»

In questo caso, a differenza della scheda sull'ellissografo, il gruppo di Sara ha disegnato sul foglio tutte le componenti della macchina, accompagnando la raffigurazione con un'attenta descrizione (la stessa della compagna). L'alunna non vedente ha riportato sul file .DOC solo la descrizione dello strumento. Per quanto riguarda il funzionamento, poiché nessuno ancora aveva individuato la presenza del portamina sul vertice in alto, tutte le congetture si sono indirizzate verso la possibile costruzione di triangoli rettangoli: facendo scorrere la struttura di metallo nella scanalatura, hanno notato subito i tre angoli retti che si formano, ed hanno pensato che la macchina servisse per ricalcare tali figure con una matita.
La seconda domanda, con risposta di Sara a seguito, riporta:

2. Inserite una mina all'interno del portamina e, applicando una leggera pressione, tracciate la curva. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma assume?

«La curva ci ricorda una collina, con punta molto erosa, mezza canoa, mezzo pesce.»

Sicuramente si è riscontrato che questa macchina è risultata più semplice da utilizzare rispetto al parabolografo a filo. L'unico ostacolo che ha ritardato la comprensione del funzionamento dello strumento è stata l'individuazione del portamina. In particolare il gruppo di Sara, non riuscendolo subito a localizzarlo, si è interrogato sul movimento della struttura. La ragazza ha affermato: «Proviamo a ragionare: se la struttura si muove così [facendo scorrere i supporti nella scanalatura], l'unico punto che si muove è questo [toccando effettivamente il portamina]; dovremmo metterla qui la mina. Gli altri punti rimangono fermi.»
Questa affermazione dimostra come Sara, utilizzando la sola percezione aptica ed il suo senso pratico, sia riuscita ad eliminare il dubbio sull'individuazione del portamina, che ancora nessuno del suo gruppo aveva individuato.
Una volta tracciata la curva (in Figura 4.6), tutto il gruppo si è interrogato sulla sua traiettoria, facendo delle similitudini con oggetti, quali "collina con punta molto erosa" e "canoa". Interessanti sono state le osservazioni fatte subito dopo aver tracciato la curva, riguardo alla funzione della macchina e alla natura della curva stessa: riportiamo un dialogo avuto tra Sara (indicata con la lettera S) ed una sua compagna di laboratorio (individuata dalla lettera A).

A : «Questa curva c'entra con questo triangolo? [si riferisce all'arco di parabola e alla struttura triangolare in metallo che compone la macchina] Se prendi un'estremità della curva e la sposti, questa può servire a realizzare il triangolo.»

S : «No, è questo triangolo che serve per tracciare la curva, non la curva che serve a tracciare il triangolo.»

[...]

A : «In questo triangolo ci sono caratteristiche precise affinché questo triangolo si possa inscrivere in un cerchio perché, se non mi sbaglio, deve avere un angolo di novanta gradi.»

S : «Ma perché è venuta fuori questa cosa?»

A : «Perché la curva magari non è un cerchio, ma appena lei l'ha prolungata così io ho pensato ad un cerchio. Quindi magari è un pezzo di cerchio.»

Da questo scambio di battute si evince come, con la sola percezione aptica, Sara sia riuscita a capire il funzionamento della macchina: ha corretto la sua compagna, spiegandole giustamente che la curva viene realizzata muovendo "i triangoli" (ovvero la struttura in ferro che compone il parabolografo), e non viceversa.
Proprio questa discussione ha aperto la strada alla domanda successiva, in merito alla quale è stata riportata nel seguito la risposta di Sara e il confronto fra i ragazzi.

3. Quali differenze e quali similitudini riuscite a trovare con le curve che già conoscete? Elencatele qui sotto.

«Una parabola (un'iperbole).»

La discussione tra i componenti del gruppo non è stata trascritta sul foglio, né sul file .DOC di Sara. Ne riportiamo una parte, in cui Sara viene indicata con la lettera S e due compagni di laboratorio con le lettere A e B:

A : «Ma la curva è chiusa? Cioè se noi continuassimo a disegnare che cosa accadrebbe?»

S : «Non riusciamo a disegnarlo.» [intende che non riesce a prolungare il disegno con la macchina perché ad un certo punto il meccanismo si blocca]

A : «Quindi è una linea che continuerebbe all'infinito, ma che non va a chiudersi.»

S : «Magari andando avanti a forza di curvarsi si chiude.» [sta pensando di prolungare il disegno, quindi di apportare delle modifiche alla macchina]

B : «Ricorda una parabola, ma la parabola quando la fai ha una fine da una parte (intende il vertice). Cioè la parabola non è infinita perché ha un inizio, mentre questa no.»

Sara, essendo legata al senso tattile, ha riportato ciò che la sua esperienza le ha suggerito: il parabolografo di Cavalieri non permette di disegnare perfettamente tutto l'arco di parabola, quindi la ragazza non vedente ha azzardato l'ipotesi, del tutto plausibile, che si potrebbe creare una nuova curva trasformando la struttura dello strumento. Partendo dall'esperienza pratica, Sara è stata stimolata dall'osservazione fatta da un suo collega e si è costruita mentalmente una macchina matematica modificata (che tende a "chiudere la curva"), anticipando il decimo quesito (domanda extra) relativo a questa scheda. Bisogna sottolineare che, anche durante la risoluzione della scheda sull'ellissografo, la ragazza non vedente aveva anticipato il quesito relativo alla variazione dello strumento: nella prima risposta aveva intuito come generare una circonferenza a partire dalla macchina in esame. Questa sua abilità potrebbe nascere dal fatto che un alunno non vedente, soprattutto nella disciplina matematica, dovrebbe essere abituato all'adattamento dei materiali didattici (si veda la Sezione 1.5.2 a pagina 20): Sara ha imparato tale capacità nell'Istituto Cavazza, dove ha potuto usufruire delle spiegazioni da parte di psicologi e tiflologi altamente specializzati.
Analizzando ancora il terzo quesito, si nota come i ragazzi si siano interrogati sulla proprietà di limitatezza della curva, facendo delle ipotesi al riguardo.
Lo scambio di battute ha portato all'affermazione che la curva descritta dal parabolografo di Cavalieri non può essere una parabola in quanto non ha "un inizio", intendendo il massimo o il minimo (comunque il vertice), mentre alla figura generata dallo strumento manca proprio "la parte più stretta".
A causa della criticità della fabbricazione dello strumento (nella posizione dove idealmente sarebbe dovuto essere il vertice, vi è una placca di metallo per consentire al meccanismo di non uscire dalla scanalatura del legno), non sono riusciti ad arrivare ad una conclusione univoca: per questioni costruttive, il parabolografo di Cavalieri non permette di costruire tutta la curva

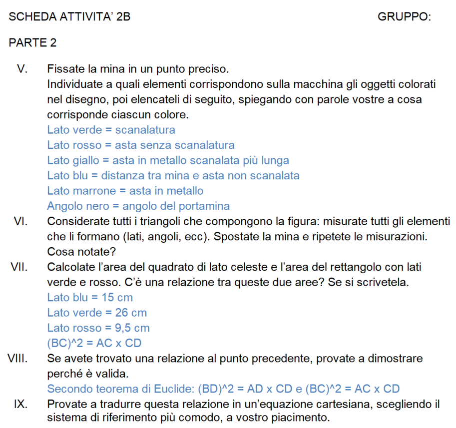
a partire dal vertice, lasciando i ragazzi nel dubbio che possa continuare ad andare all'infinito sia da un lato, che dall'altro. A tal proposito io ed Alessia siamo intervenute per completare il disegno della curva fino a raggiungere il vertice.
La domanda numero 4 segna la fine della prima parte della scheda relativa allo studio di questa macchina, ed è la seguente (con al seguito la risposta di Sara)

4. Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina? Realizzate un elenco in cui per ogni oggetto considerato specificate se questo varia oppure no (osservate in particolare segmenti, angoli, lunghezze, ecc.). Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete affianco il suo valore. Se invece pensate che vari, riportate almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

«Rimane costante. Due triangoli, uno varia e l'altro no.»

Il gruppo di Sara, per questioni di tempo, non è riuscito ad elencare in maniera esauriente gli oggetti varianti e quelli invarianti durante il movimento del parabolografo in esame: hanno preferito concentrarsi di più sulla seconda e terza domanda (tanto da farne scaturire delle discussioni in merito, come abbiamo riportato poc'anzi), tralasciando le misurazioni da effettuare al punto 4, come richiesto dalla consegna. La ragazza non vedente ha brevemente risposto che durante lo scorrimento lungo la scanalatura, dei due triangoli che formano la struttura in ferro, uno varia di grandezza mentre l'altro no. L'incompletezza di tale risposta è dovuta, molto probabilmente, anche alla difficoltà da parte di Sara nell'indicare i lati e gli angoli di cui la macchina è composta: la trascrizione in WORD di tutti gli elementi del parabolografo avrebbe impiegato molto tempo (già occupato dai dibattiti avuti in precedenza) nonché una complessa ricerca per la corretta individuazione di questi. Avendo notato questa mancanza, siamo intervenute rassicurando tutto il gruppo che nella seconda parte ci sarebbe stato uno strumento in

aiuto per effettuare meglio le misurazioni.
La seconda parte della scheda sul parabolografo di Cavalieri presenta cinque domande ed è riportata nella Figura 4.7, con le risposte date da Sara riportate in blu.


SCHEDA ATTIVITA' 2B GRUPPO:

PARTE 2

V. Fissate la mina in un punto preciso.
Individuate a quali elementi corrispondono sulla macchina gli oggetti colorati nel disegno, poi elencateli di seguito, spiegando con parole vostre a cosa corrisponde ciascun colore.
Lato verde = scanalatura
Lato rosso = asta senza scanalatura
Lato giallo = asta in metallo scanalata più lunga
Lato blu = distanza tra mina e asta non scanalata
Lato marrone = asta in metallo
Angolo nero = angolo del portamina

VI. Considerate tutti i triangoli che compongono la figura: misurate tutti gli elementi che li formano (lati, angoli, ecc). Spostate la mina e ripetete le misurazioni. Cosa notate?

VII. Calcolate l'area del quadrato di lato celeste e l'area del rettangolo con lati verde e rosso. C'è una relazione tra queste due aree? Se si scrivetela.
Lato blu = 15 cm
Lato verde = 26 cm
Lato rosso = 9,5 cm
(BC)^2 = AC x CD

VIII. Se avete trovato una relazione al punto precedente, provate a dimostrare perché è valida.
Secondo teorema di Euclide: (BD)^2 = AD x CD e (BC)^2 = AC x CD

IX. Provate a tradurre questa relazione in un'equazione cartesiana, scegliendo il sistema di riferimento più comodo, a vostro piacimento.

Figura 4.7: Risposte (in blu) date da Sara relativamente alla seconda parte della scheda sul parabolografo.

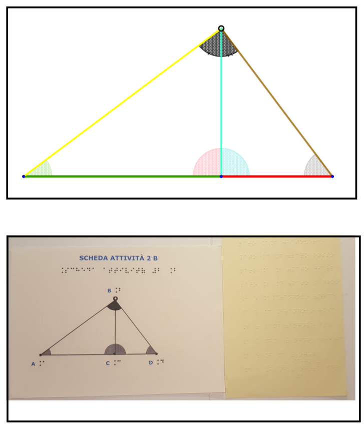


Figura 4.8: Disegni consegnati al gruppo di Sara.

La quinta domanda con relativa risposta di Sara è:

5. Fissate la mina in un punto preciso.
Individuate a quali elementi corrispondono sulla macchina gli oggetti colorati nel disegno, poi elencateli di seguito, spiegando con parole vostre a cosa corrisponde ciascun colore.

«Lato verde = scanalatura
Lato rosso = asta senza scanalatura
Lato giallo = asta in metallo scanalata più lunga
Lato blu = distanza tra mina e asta non scanalata
Lato marrone = asta in metallo
Angolo nero = angolo del portamina.»

A differenza degli altri gruppi, quello di Sara è stato l'unico che ha associato i colori alla descrizione delle componenti del parabolografo (come si evince dalla risposta appena riportata): i compagni di laboratorio dell'alunna non vedente, avendo a disposizione anche la stampa in rilievo della ragazza, con la relativa istruzione (si veda la Figura 3.25 a pagina 108 per la traduzione), hanno dapprima ritenuto più opportuno utilizzare le stesse lettere riportate nel disegno in rilievo, e quindi hanno ricondotto i lati e gli angoli presenti nelle istruzioni di Sara direttamente alle componenti dello strumento.
Invece gli altri tre gruppi, aventi in esame la stessa macchina della ragazza non vedente, hanno utilizzato fin da subito una terminologia matematica adeguata (i termini cateto, ipotenusa, ecc.), come mostrato in Figura 4.9.

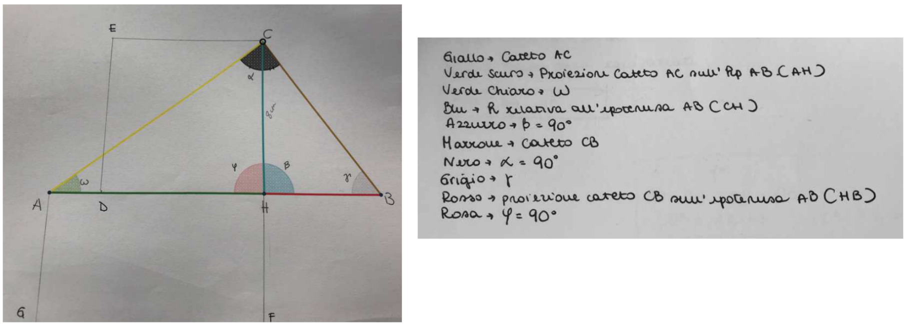


Figura 4.9: Esempio di risposta alla domanda 5 di un gruppo con solo normodotati.

La quinta domanda ha generato un po' di confusione all'interno del gruppo della ragazza non vedente; il passaggio da un dispositivo all'altro (ad esempio dalla stampa in minolta alle istruzioni, e quindi anche alla traduzione da parte di Sara del testo in Braille per renderlo accessibile ai suoi compagni) ha richiesto più tempo per l'elaborazione della risposta.
Da questo confronto si nota come il problema dell'accessibilità di un documento non è solo dei non vedenti: cercare di rendere raggiungibile un oggetto a persone con diverse abilità può aprire molteplici strade, come in questo caso. Se da un lato si è perso tempo per far arrivare tutti allo stesso livello di interpretazione del testo, dall'altro si è giunti ad una risoluzione alterna-

tiva dell'esercizio; non a caso i gruppi senza la ragazza non vedente hanno interpretato univocamente la quinta domanda e in modo più "astratto". Il gruppo di Sara, invece, ha preferito una via più "pratica".
La domanda numero 6 riporta:

6. Considerate tutti i triangoli che compongono la figura: misurate tutti gli elementi che li formano (lati, angoli, ecc). Spostate la mina e ripetete le misurazioni. Cosa notate?

L'unico gruppo che non ha risposto è stato quello di Sara, in quanto ha impiegato più tempo nella risoluzione del quinto quesito. É stato consigliato a tutti i componenti del gruppo di procedere con le domande successive, ritenute più significative al fine della comprensione del funzionamento della macchina.
Il settimo e l'ottavo quesito, con a seguito le risposte di Sara, citano:

7. Calcolate l'area del quadrato di lato celeste e l'area del rettangolo con lati verde e rosso. C'è una relazione tra queste due aree? Se si scrivetela.

   «Lato blu = 15 cm,
   Lato verde = 26 cm,
   Lato rosso = 9,5 cm,
   $(BC)^2 = AC \times CD$.»
   (L'immagine di riferimento è la Figura 3.24 a pagina 107.)

8. Se avete trovato una relazione al punto precedente, provate a dimostrare perché è valida.

   «Secondo teorema di Euclide: $(BD)^2 = AD \times CD$ e
   $(BC)^2 = AC \times CD$.»
   (L'immagine di riferimento è la Figura 3.24 a pagina 107.)

Sara ed il suo gruppo hanno risposto prima alla domanda numero 8 e successivamente a quella numero 7.
I ragazzi, infatti, si sono accorti fin da subito della somiglianza tra quanto richiesto nei quesiti ed il secondo Teorema di Euclide; senza effettuare alcuna misurazione, hanno ragionato sul fatto che valesse o meno nel loro caso specifico, individuando nella presenza dell'angolo retto in $\widehat{B}$ (si veda sempre la Figura 3.24 a pagina 107) la conferma della loro ipotesi e giungendo alla dimostrazione della relazione (domanda 8). Solo alla fine hanno effettuato le misurazioni specifiche richieste dal quesito numero 7.
L'approccio utilizzato dal gruppo di Sara è da ricollegarsi ad una precisa motivazione: durante la stessa settimana in cui è avvenuta la sperimentazione, gli studenti hanno ripassato in classe, con la professoressa di matematica, i teoremi di Euclide.
Infine la nona domanda, riportata di seguito, è risultata complessa per tutti i gruppi:

9. Provate a tradurre questa relazione in un'equazione cartesiana, scegliendo il sistema di riferimento più comodo, a vostro piacimento.

Nessuno aveva ben chiaro cosa significasse trovare un'equazione cartesiana descrittiva per la curva: per questo motivo abbiamo deciso di lasciare più tempo ai ragazzi per ragionare sulla soluzione ed, eventualmente, riprenderne la correzione la lezione successiva.
A Sara è stato consegnato il piano in rilievo e due cordoncini in cotone per creare il riferimento cartesiano. Tuttavia ha chiesto chiarimenti su come procedere: dopo una consultazione con il gruppo, si è scelto di porre come asse x la scanalatura incisa sulla macchina e come asse y la retta perpendicolare alla scanalatura e passante per il perno fisso più a sinistra che compone la macchina, come in Figura 3.33 a pagina 115. In questo modo, una ragazza del gruppo ha fatto notare che «la curva sarebbe rimasta tutta positiva».
Sara e i suoi compagni di laboratorio, anche se avevano individuato correttamente la relazione da tradurre in termini cartesiani, si sono trovati comunque

in difficoltà nel capire a quali elementi dovevano associare delle variabili e a quali dei valori fissi. In particolare Sara ed un suo collega si sono chiesti (S indica Sara e A il ragazzo del gruppo):

A : «Qual è l'elemento costante in questo? L'angolo di novanta gradi, però io lavorerei sui lati perché per scrivere un'equazione cartesiana è meglio associare una misura ai lati.»

S : «Dovremmo prendere la formula di Euclide con le lettere [si riferisce alle lettere maiuscole usate nella relazione di Euclide sulle aree] e cambiarle con x e y, ma cosa chiamiamo x e cosa y?»

A : «Ci servono altre costanti.»

Il fatto che nessuno sia riuscito a giungere alla traduzione corretta della relazione euclidea sulle aree in termini cartesiani, è legato probabilmente al fatto che i ragazzi non sono mai stati abituati a svolgere attività o esercizi di passaggio dal piano sintetico a quello analitico. La natura della macchina matematica, inoltre, non facilita questa transizione: non è possibile scegliere un sistema di riferimento cartesiano adeguato in modo univoco, e l'individuazione degli oggetti fissi (a cui attribuire un valore specifico) e "mobili" (ai quali va assegnata una variabile) è risultato più difficile del previsto.

4.3 Terza lezione: discussione finale

La terza lezione si differenzia dalle prime due in quanto non ha avuto un'impronta laboratoriale: i gruppi sono stati sciolti e gli studenti hanno seguito la correzione e la discussione dal loro posto, in maniera "standard". In questa occasione, i mezzi semiotici di oggettivazione usati da Sara sono stati: le macchine matematiche, le stampe in Minolta, i piani in rilievo, i software WORD e LAMBDA e il cono in DAS.
La lezione è iniziata riportando la correzione del nono quesito (scrittura dell'equazione cartesiana della curva) di entrambe le schede, iniziando dal para-

bolografo a filo. Sono stati consegnati a Sara il parabolografo a filo adattato, la stampa in Minolta (come in Figura 3.34 a pagina 116) e il piano cartesiano in rilievo. Si è deciso di incidere già la curva sul foglio di plastica sia perché la ragazza non vedente aveva ormai provato lo strumento durante la precedente lezione (si veda discussione inter-pares nella Sezione 3.3.2) e sia per lo scarso tempo a disposizione.
La lezione è proseguita con la descrizione di come poter ricavare l'equazione generale della curva, direttamente alla lavagna: Sara è così passata dall'uso della macchina matematica, a quello del piano in rilievo, fissandoci sopra il foglio di plastica con la curva incisa e i due cordoncini di cotone come assi cartesiani (in Figura 3.35 a pagina 116), per poi spostarsi sul suo PC, iniziando a ricopiare ciò che veniva scritto alla lavagna attraverso il programma LAMBDA (Figura 3.36 a pagina 116).
Senza dubbio le difficoltà maggiori per Sara sono nate in questo momento: ad esempio dover individuare un punto e una distanza, dapprima sulla macchina matematica, poi sul piano cartesiano ed infine sul foglio elettronico, ha richiesto un considerevole sforzo mentale e fisico da parte dell'alunna non vedente. Il passaggio continuo da un dispositivo all'altro ha comportato una costante presenza del docente di sostegno: il professore ha agevolato il cambio dei sussidi didattici e ha aiutato la ragazza nella trascrizione delle formule più lunghe, scritte sulla lavagna.
Così, dopo aver scelto un sistema cartesiano opportuno e aver fatto emergere la proprietà caratterizzante della curva (l'uguaglianza 3.3 relativa alla Figura 3.31), tracciata grazie alla particolare struttura del parabolografo a filo, si è tradotta tale relazione in equazione cartesiana.
Conclusa la spiegazione relativa alla nona domanda della scheda sul parabolografo a filo, è iniziata quella riguardante il parabolografo di Cavalieri, seguendo le stesse modalità espositive.
Durante questa fase, Sara non ha manifestato particolari dubbi, in quanto ha esaminato proprio questa macchina matematica nella precedente attività laboratoriale. Tuttavia l'insegnante di sostegno ha continuato a fornirle tutto

il supporto necessario fino alla fine della discussione.
La relazione da tradurre in termini cartesiani è stata spiegata facendo notare quali fossero gli oggetti fissi (valori specifici) e quali quelli mobili (variabili), in uno specifico sistema di riferimento cartesiano. Sara ha usufruito un'ultima volta del parabolografo di Cavalieri adattato per individuare una volta per tutte gli elementi costanti e quelli variabili: attraverso movimenti fini, ha seguito con le dita i contorni e le superfici dell'intera struttura, ricominciando questo processo esplorativo anche dopo aver cambiato la posizione della punta scrivente. Così facendo, ha potuto constatare se, ad esempio, una determinata distanza potesse cambiare oppure rimanere ferma e assegnarle rispettivamente un valore variabile oppure costante (Figura 3.36 a pagina 116).
Terminata la correzione dei quesiti relativi ai parabolografi, si è sottolineato come le curve tracciate dalle due diverse macchine matematiche siano effettivamente la stessa curva, essendo rappresentate dalla stessa equazione analitica. Si è, quindi, accennato al fatto che un'equazione cartesiana, che descrive una determinata curva, dipende strettamente dal sistema di riferimento scelto: per questo motivo, è stato possibile che alcuni gruppi fossero giunti a soluzioni diverse, ma non per questo errate.
La seconda parte della lezione è stata incentrata su una ricapitolazione di quanto svolto durante le due attività precedenti. È stata impostata una discussione guidata che partisse dalla puntualizzazione delle definizioni di circonferenza ed ellisse, per poi passare a quella di parabola (introdotta poco prima, durante la correzione della nona domanda della scheda sul parabolografo a filo); si è fatto in modo che emergessero le proprietà caratterizzanti di ciascuna curva, sfruttate dalle macchine matematiche analizzate in precedenza.
Sara ha scritto queste definizioni usando il software WORD, assistita dal docente di sostegno.
Con gli obiettivi di motivare lo studio effettuato su queste tre curve specifiche e di uniformare il discorso, è stato introdotto il concetto di conica: tutte

le curve viste fino a qui assumono un'importanza notevole in matematica perché si ottengono come sezioni di un cono, ovvero tagliando quest'ultimo con piani di diversa inclinazione. Per mostrare meglio a cosa ci stavamo riferendo, è stato realizzato un cono di diversi colori in materiale DAS, inciso lungo le quattro coniche, come mostrato in Figura 3.37 a pagina 118.
Grazie alle incisioni nere, ciascuna delle quali corrispondente ad una curva diversa, l'oggetto a forma di cono ha permesso a Sara di comprendere cosa stava succedendo: la ragazza non vedente ha esplorato, con entrambe le mani, la superficie liscia del solido, fermandosi ad analizzare con più attenzione i tagli che incontrava durante la percezione aptica. Ad ogni sezione trovata da Sara durante la sua esplorazione, l'insegnante di sostegno ripeteva il nome della curva e il modo in cui è ottenuta.
Il cono in DAS è stato realizzato tenendo conto delle proprietà in sintonia con il suo scopo: è a tutti gli effetti uno strumento specifico per l'insegnamento della matematica ed, in particolare, è trasportabile e adeguato alle caratteristiche percettive di un disabile visivo (può essere utilizzato anche da un ipovedente, grazie all'uso dei colori forti e contrastanti utilizzati per le sezioni adiacenti), si veda la Sezione 1.5.2 a pagina 20 per un approfondimento in merito.
Anche attraverso il cono in DAS, Sara ha potuto oggettivare le curve analizzate con i principali mediatori semiotici di questo laboratorio, ovvero le macchine matematiche.
Infine, è stata introdotta l'ultima conica presente sul solido conoidale e non ancora analizzata in classe: l'iperbole. È stata scritta la sua proprietà caratterizzante ed è stato mostrato alla classe il funzionamento dell'iperbolografo a filo, una macchina matematica realizzata proprio per questa occasione (rappresentata in Figura 3.38 a pagina 118). Si tratta di una tavola in legno ricoperta da un sottile foglio di gomma su cui disporre un foglio di plastica o, in alternativa, un foglio di carta; ci sono anche due aste di legno imperniate in 2 viti, su 4 presenti. Le viti sono poste al centro della tavola, alla stessa distanza le une dalle altre. Sull'estremità libera di entrambe le sbarre, è ag-

ganciato un filo inestensibile, di lunghezza minore di quella dell'asta: il filo parte dalla sommità di un'asta e termina avvolto alla vite in cui è agganciata l'altra asta. Tenendo il filo teso con la punta di una matita, accostandolo alla sbarra, si fa ruotare l'asta attorno al suo perno: viene così descritto un arco di un'iperbole i cui fuochi sono le viti che fissano le sbarre. La proprietà matematica utilizzata per la costruzione della curva è proprio quella caratteristica dell'iperbole: il valore assoluto della differenza delle distanze di un punto qualsiasi della curva dai due fuochi rimane costante.
Anche questa macchina matematica, così come il cono in DAS, è stato costruita come materiale pedagogico specifico per l'insegnamento ai non vedenti (si veda la Sezione 1.5.2 a pagina 20). Tuttavia, anche i normodotati possono usufruirne: nella realizzazione dell'iperbolografo a filo sono stati utilizzati gli stessi accorgimenti presi per adattare il compasso piano, l'ellissografo e i parabolografi.
Nello specifico, le caratteristiche peculiari di questo strumento sono i seguenti:

- presenza di un foglio di gomma sottile
  Per permette ai disabili visivi di disegnare su un eventuale foglio di plastica.

- utilizzo da parte di non vedenti e vedenti
  Grazie al sottile spessore del foglio di gomma, è possibile scrivere e disegnare su di esso, senza incontrare attrito. Non solo i non vedenti, ma anche i normodotati possono usufruire di questa macchina matematica: basta fissare con dello scotch 2 semplici fogli A4, bucandoli in corrispondenza delle 4 viti.

- possibilità di disegnare due iperboli con eccentricità diverse
  Sono state inserite 4 viti, anziché 2. Posizionando le due aste sui due perni più esterni, si ottiene l'iperbole blu con eccentricità maggiore rispetto all'iperbole rossa, ottenuta posizionando le due aste sulle due viti più interne (si veda la Figura 3.38 a pagina 118).

- presenza di accorgimenti per non vedenti nella struttura
  Le aste di legno terminano con dei chiodi a testa tonda, utili sia per bloccare il filo e sia per far riconoscere ai disabili visivi la fine della sbarra: in questo modo si permette anche una più accurata misurazione dello strumento.
  Sono stati avvitati sopra ciascun perno dei coprivite bombati, per proteggere le mani durante l'esplorazione aptica.

Durante la discussione sulle coniche, si è deciso di far girare tra i banchi sia il cono in DAS e sia l'iperbolografo a filo, lasciando gli alunni liberi di esplorarne le caratteristiche. Abbiamo ricevuto feedback positivi per entrambi gli strumenti: alcuni ragazzi hanno scattato delle fotografie al cono, mentre altri (tra cui Sara) si sono concentrati più sulla nuova macchina matematica, cercando di creare autonomamente un'iperbole.

4.4 Considerazioni finali sul laboratorio

È opportuno riassumere sia gli aspetti positivi e sia le criticità che sono emersi durante l'attività didattica svolta con le macchine matematiche.
In merito agli aspetti positivi, va subito notato che fin dalla prima sessione di laboratorio, Sara si è dimostrata collaborativa ed interessata a partecipare all'attività, intervenendo con commenti ed osservazioni e mostrando di avere anche un notevole intuito.
Il lavoro in un gruppo, dinamica a cui non era abituata, insieme all'uso delle macchine matematiche hanno sicuramente reso l'introduzione delle coniche (poco interessante per una studentessa di un liceo linguistico) più stimolante e divertente, favorendo un apprendimento più attivo e, dunque, più solido. Questo apprendimento "per scoperta" ha permesso di rendere più dinamica una materia che, spesso, viene considerata statica e immutabile nelle sue regole di funzionamento.
Dall'analisi sulla prima e seconda lezione emerge l'importanza del reciproco aiuto messo in pratica sia dagli studenti normodotati verso Sara (quando, ad

esempio, effettuano la maggior parte delle misurazioni richieste dalle consegne) e sia da Sara verso gli stessi componenti del gruppo (quando, con la sola esplorazione tattile, riesce ad individuare le possibili modifiche da apportare all'ellisografo).
Nel momento in cui gli studenti effettuano un disegno sul foglio (come per la risposta alla prima domanda relativa al parabolografo di Cavalieri) e ne riportano anche un'accurata descrizione (verbale), la compagna non vedente riesce subito a comprendere meglio la consegna da svolgere e a partecipare più attivamente alla discussione. D'altro canto Sara, essendo legata al senso tattile, riporta ciò che la sua esperienza le suggerisce, fornendo numerosi spunti e punti di vista differenti per lo studio della curva: ad esempio, nella risposta alla seconda domanda relativa all'ellissografo, fa notare la somiglianza esistente tra l'ellisse e una forma ad uovo, sottolineando la continuità e la chiusura delle due curve.
Questo scambio continuo di agevolazioni ha reso il gruppo di Sara l'unico capace di stabilire un legame tra geometria e realtà: la risposta alla seconda domanda del parabolografo di Cavalieri ne è un esempio: tutto il gruppo, infatti, conviene di rispondere che la curva ricorda "una collina, con punta molto erosa", o ancora "una mezza canoa". La necessità di un ricorso al concreto è fondamentale per lo studio della geometria, come mostrato in [8]: solo così si possono esercitare al meglio le facoltà sintetiche ed analitiche dello studente. In entrambi i laboratori, infatti, il gruppo di Sara è riuscito ad individuare il corretto uso degli strumenti e, attraverso un'adeguata loro manipolazione, anche ad arrivare alla giusta costruzione delle curve, quasi sempre senza l'intervento dell'insegnante. Quindi avere a disposizione un materiale operativo (come la macchina matematica) e utilizzandolo correttamente, non soltanto con una serie continua di tentativi ma soprattutto con riflessioni pratiche (esperienza embodied), porta alla costruzione di una matematica più moderna, dove non vengono studiati gli enti in sé, ma piuttosto le operazioni e le trasformazioni che li legano.

Un altro aspetto positivo da sottolineare è la collaborazione con l'insegnante di sostegno, decisivo sia nell'attività con il parabolografo di Cavalieri e sia durante l'ultimo incontro (quando si è riassunta l'intera attività): solo grazie al lavoro svolto dal docente, Sara ha potuto trascrivere correttamente tutti i procedimenti analitici svolti alla lavagna. Il problema principale, infatti, si è riscontato quando la studentessa non vedente è dovuta passare da un sussidio tiflodidattico ad un altro in poco tempo: l'uso in contemporanea del PC, della macchina matematica e del piano cartesiano in rilievo ha necessitato l'intervento del professore di sostegno, al fine di facilitare ed agevolare i passaggi di tali supporti.
Un'altra criticità emersa è stata il ritardo accumulato dal gruppo di Sara in entrambe le attività svolte: le accurate analisi prodotte durante lo svolgimento dei laboratori (anche grazie, come già detto, ai continui riferimenti alla vita reale e concreta) e la difficile gestione logistica dei materiali per non vedenti hanno reso evidente che serve più tempo per lo svolgimento di un compito se, all'interno del gruppo, è presente un disabile visivo.
Infine, sarebbe auspicabile permettere un'interazione tra tutti i gruppi anche nella parte finale della seconda e terza attività, con le stesse modalità della discussione inter-pares avvenuta durante il laboratorio sull'ellissografo: per questo motivo, avere a disposizione più tempo consentirebbe anche la realizzazione di quest'ultima fase. Si ritiene che non solo i ragazzi possano sentirsi più a loro agio a parlare di matematica tra pari, ma anche che i quesiti e gli argomenti messi in discussione possano portare ad osservazioni più stimolanti ed interessanti.

Conclusione

Dopo un anno trascorso ad indagare sul rapporto tra matematica e cecità, è maturata la convinzione che quando questa disciplina sarà presentata allo studente non vedente nel modo più chiaro e fruibile possibile, allora anche tutta la classe ne trarrà vantaggio. Infatti si ritiene che riflettere sulle implicazioni tra matematica e cecità non giovi soltanto al disabile visivo ma, puntando sulla chiarezza e sull'importanza dell'esperienza diretta, porti a un miglioramento della didattica per tutti i ragazzi, indipendentemente dal fatto che essi possano o non possano vedere.

Lavorare in contesti e situazioni di educazione speciale, afferma Vygotsky in [27], permette un'analisi più dettagliata e mirata dei processi di funzionamento cognitivo generale, quindi con una ricaduta per la didattica della matematica: costruire un percorso didattico specifico per non vedenti dentro un'attività laboratoriale finalizzata per i normodotati, suggerisce indirettamente metodi per una migliore oggettivazione, diretta anche a studenti vedenti (ad esempio la costruzione del cono sezionato, finalizzato all'uso dei disabili visivi, è stato usato ed apprezzato anche da studenti vedenti).

La matematica è una delle materie in cui gli studenti incontrano più difficoltà: il suo apprendimento è un processo dinamico, che coinvolge numerose funzioni cognitive del soggetto e che avviene all'interno di uno specifico contesto socio-culturale. La dinamicità del processo di apprendimento necessita di una dinamicità di contesto per poter avvenire liberamente, altrimenti rischia di subire dei rallentamenti. Le attività laboratoriali, soprattutto di geometria, rappresentano un esempio di apprendimento attivo: gli alunni

hanno l'occasione di mettere in gioco competenze diverse, di consolidare le loro conoscenze, di approfondire i concetti e di integrare i compagni disabili.
Il laboratorio organizzato nella classe di Sara ha dato prova di possedere tutte queste caratteristiche: in particolare, a differenza delle classiche lezioni frontali, in cui gli studenti si limitano passivamente a recepire le conoscenze, è stato possibile sperimentare un apprendimento per scoperta, più significativo e duraturo.
L'utilizzo delle macchine matematiche si presta molto alla riuscita di una buona attività di laboratorio: le domande presentate durante lo svolgimento delle prove hanno previsto che gli studenti lavorassero a piccoli gruppi, per avere occasione di confrontarsi, discutere e imparare l'uno dall'altro. Inoltre la manipolazione, costantemente richiesta da questi artefatti, ha permesso anche alla ragazza non vedente di partecipare al laboratorio, alla pari dei suoi colleghi.
Al termine dell'attività in classe, si è riscontato che le macchine matematiche possono costituire un importante mezzo per favorire sia un apprendimento profondo e sia l'integrazione di studenti non vedenti, costruendo un ponte tra attività manuali ed intellettuali.
Il limite principale di questo lavoro è quello di non aver potuto sperimentare le proposte didattiche presentate nel secondo capitolo. Esse pertanto sono una riflessione personale sul tema, basata sulle esperienze e gli insegnamenti di Emma Castelnuovo, [8, 9]. Le proposte vanno dunque intese come tali, valutate in rapporto al contesto educativo in cui ci si trova e all'allievo che si ha di fronte. Lo spirito con cui sono nate è quello di favorire l'uso delle meccaniche matematiche all'interno della classe per studiare non l'oggetto in sé, ma le operazioni e le costruzioni che si possono realizzare.
L'auspicio è che il lavoro presentato in questa tesi non venga colto come escludente, ma fornisca spunti per le attività condivise in cui lo studente non vedente non sia solo inserito tra le mure della classe ma abbia la possibilità di viverla in prima persona.

Appendice

Appendice A

Schede illustrative dei pantografi

In questa appendice sono presenti le schede descrittive dei pantografi presenti in giacenza presso il Liceo Scientifico Augusto Righi di Bologna.

Le schede verranno prossimamente pubblicate sulla pagina web dedicata (`https://www.liceorighibologna.it/pvw/app/BOLS0003/pvw_sito.php?sede_codice=BOLS0003&page=2058737`) a scopo illustrativo, insieme a quelle dei curvigrafi, trattate in [24] e presenti presso lo stesso istituto.

PANTOGRAFO PER LA SIMMETRIA ASSIALE

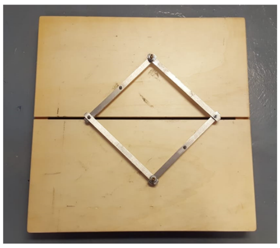


Figura A.1: Fotografia del pantografo a simmetria assiale.

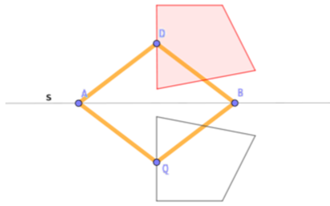


Figura A.2: Immagine virtuale del pantografo a simmetria.

Numero di macchine presenti: 5.

Dimensioni della macchina: cm $40 \times 40 \times 6$.

Descrizione della macchina: Il pantografo è costituito da un corpo romboidale articolato $AQBD$, avente due vertici opposti A e B vincolati a muoversi solo in linea retta lungo una scanalatura s, mentre gli altri due vertici Q e D risultano liberi di muoversi con due gradi di libertà (vedi Figura A.2).

Funzionamento della macchina: La macchina realizza una corrispondenza tra i due semipiani individuati dalla scanalatura s. Avendo la diagonale AB fissata su s, i punti A e B si possono muovere solo lungo di essa, avvicinandosi e allontanandosi tra loro, mentre i due vertici opposti D e Q sono "liberi" di muoversi nei semipiani di appartenenza. Su questi ultimi è posizionata una mina, ed è quindi possibile tracciare traiettorie che si corrispondono secondo una simmetria assiale di asse la scanalatura s stessa: muovendo uno dei due punti (ad esempio D) per disegnare una figura qualsiasi, il suo opposto (in questo caso Q) descriverà la traiettoria simmetrica (vedi Figura A.2).

PANTOGRAFO PER LA SIMMETRIA CENTRALE

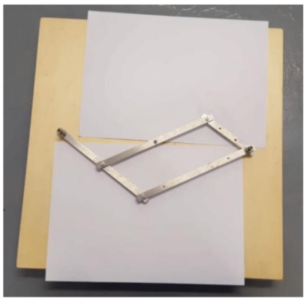


Figura A.3: Fotografia del pantografo a simmetria centrale.

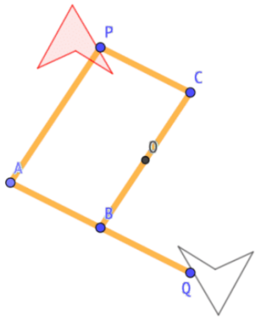


Figura A.4: Immagine virtuale del pantografo a simmetria centrale.

Numero di macchine presenti: 5.

Dimensioni della macchina: cm $40 \times 40 \times 6$.

Descrizione della macchina: Il pantografo è costituito da un parallelogramma articolato $ABCP$, il cui lato AB è prolungato di un segmento BQ della stessa lunghezza di AB. Il lato BC è fissato al piano di appoggio nel suo punto medio O (vedi Figura A.4)

Funzionamento della macchina: La macchina realizza una corrispondenza tra il punto P e il punto Q in modo che una figura disegnata da P venga riprodotta simmetricamente in Q, rispetto al centro O (osserviamo che i raggi PO e OQ coincidono). Per farlo, si posizionano due mine nei punti P e Q e si muove uno dei due punti (ciascuno dei quali ha due gradi di libertà) a proprio piacimento (vedi Figura A.4).

PANTOGRAFO PER LA TRASLAZIONE

(Pantografo di Kempe)

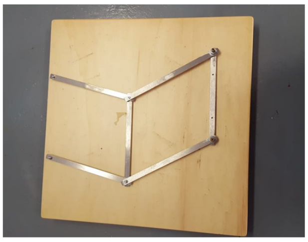


Figura A.5: Fotografia del pantografo per la traslazione.

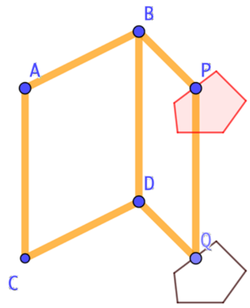


Figura A.6: Immagine virtuale del pantografo per la traslazione.

<u>Numero di macchine presenti</u>: 5.

<u>Dimensioni della macchina</u>: cm $40 \times 40 \times 6$.

<u>Descrizione della macchina</u>: Il pantografo è costituito da due parallelogrammi articolati $ABDC$ e $BDQP$ aventi il lato BD in comune e giacenti sul medesimo piano. La macchina ha, per costruzione, sia i lati AC, BD e PQ, sia i lati CD, AB, BP e DQ congruenti tra loro. Il lato AC, opposto a BD, è fissato al piano tramite due perni, mentre il lato PQ, anch'esso opposto a BD, è libero di muoversi sul piano (vedi Figura A.6).

<u>Funzionamento della macchina</u>: La macchina realizza una corrispondenza tra i punti P e Q, i quali individuano punto di partenza e di arrivo di una traslazione caratterizzata in modulo, direzione e verso dal vettore AC (se si considera Q il trasformato di P) o CA (se, invece, si considera P il trasformato di Q). In particolare, sia su P che su Q sono fissate delle mine e muovendo uno dei due punti lungo una traiettoria assegnata, l'altro punto descriverà la stessa traiettoria, ma traslata (vedi Figura A.6).

PANTOGRAFO PER LA ROTAZIONE con angolo acuto
(Pantografo di Sylvester)

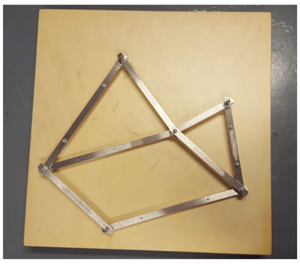


Figura A.7: Fotografia del pantografo per la rotazione.

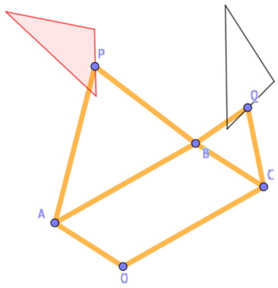


Figura A.8: Immagine virtuale del pantografo per la rotazione.

Numero di macchine presenti: 5.

Dimensioni della macchina: cm $40 \times 40 \times 6$.

Descrizione della macchina: Il pantografo è costituito da un parallelogramma articolato $ABCO$, il cui vertice O è imperniato al piano. Ai due lati adiacenti del parallelogramma AB e BC sono vincolati due triangoli isosceli simili ABP ($AB = AP$) e BCQ ($BC = CQ$), costruiti in modo che PO sia congruente a OQ e gli angoli PAB, POQ e QCB siano congruenti. I punti P e Q sono liberi di muoversi con due gradi di libertà (vedi Figura A.8).
Funzionamento della macchina: La macchina realizza una corrispondenza tra i due vertici P e Q, sui quali è inserita una mina, attraverso una rotazione di centro O e angolo POQ. Muovendo infatti il punto P, il punto Q descrive di conseguenza la stessa traiettoria di P, ruotata di un angolo pari all'ampiezza di POQ (vedi Figura A.8).

PANTOGRAFO PER L'OMOTETIA
(Pantografo di Scheiner)

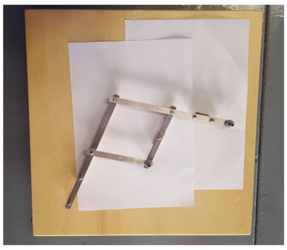


Figura A.9: Fotografia del pantografo per l'omotetia.

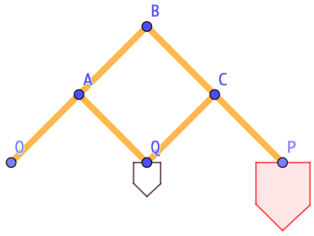


Figura A.10: Immagine virtuale del pantografo per l'omotetia.

Numero di macchine presenti: 5.

Dimensioni della macchina: cm $40 \times 40 \times 6$.

Descrizione della macchina: Il pantografo è costituito da un corpo centrale romboidale $ABCQ$, i cui lati adiacenti AB e BC sono prolungati di due aste AO e PC di lunghezza pari ai lati del rombo. Il punto O è fissato al piano, mentre sui punti P e Q sono inserite due mine. La macchina si muove in modo che i punti O, A e B rimangano allineati, così come i punti B, C e P (vedi Figura A.10).

Funzionamento della macchina: La macchina realizza una corrispondenza tra i punti P e Q, attraverso un'omotetia di centro O. Perciò, disegnando con una punta scrivente posta in P una figura, la mina opportunamente fissata in Q traccerà la stessa figura in scala 1:2.
$\frac{1}{2}$ è detto rapporto di omotetia: deriva dal fatto che A divide esattamente a metà OB (vedi Figura A.10).

PANTOGRAFO PER STIRAMENTO

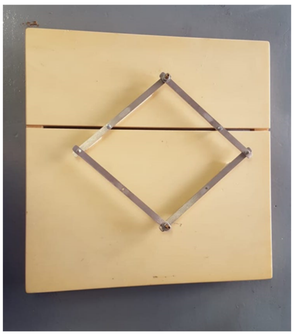


Figura A.11: Fotografia del pantografo per lo stiramento.

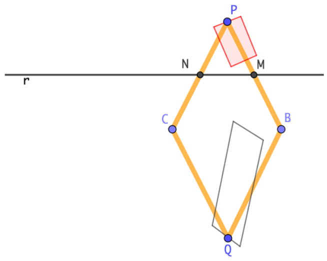


Figura A.12: Immagine virtuale del pantografo per lo stiramento.

<u>Numero di macchine presenti</u>: 5.

<u>Dimensioni della macchina</u>: cm $40 \times 40 \times 6$.

<u>Descrizione della macchina</u>: Il pantografo è costituito da un corpo romboidale articolato $CPBQ$, i cui punti M e N (appartenenti rispettivamente a CP e a PB e individuati in modo che $PN \cong PM$) sono vincolati a muoversi lungo una scanalatura rettilinea r. Sui vertici P e Q è fissata una mina ed essi sono liberi di muoversi con due gradi di libertà (vedi Figura A.12).

<u>Funzionamento della macchina</u>: La macchina realizza una corrispondenza tra i due semipiani individuati dalla scanalatura r. Durante la deformazione del sistema articolato, la retta che congiunge P con Q rimane sempre perpendicolare a r, poiché quest'ultima è parallela alla diagonale del rombo CB. Inoltre risulta sempre costante il rapporto delle distanze di P e di Q da r, dato da $k = \frac{(2PB-PM)}{PM}$. Quindi, quando una punta scrivente posta in P percorre una figura assegnata, una mina opportunamente posta in Q descrive la sua trasformata secondo uno stiramento di rapporto k (vedi Figura A.12).

GENESI TRIDIMENSIONALE DELLO STIRAMENTO
(Ombre Solari)

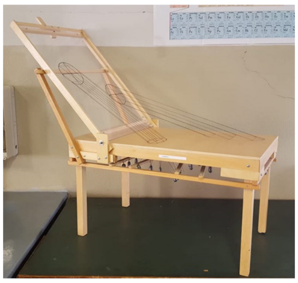


Figura A.13: Fotografia della genesi tridimensionale dello stiramento.

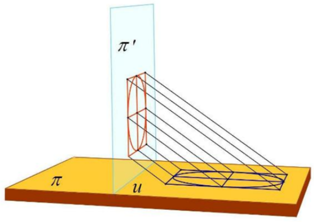


Figura A.14: Immagine virtuale della genesi tridimensionale dello stiramento.

Numero di macchine presenti: 1.

Dimensioni della macchina: cm $94 \times 53 \times 55$.

Descrizione della macchina: Il modello fisico è composto dai due piani π' (costituito da una lastra trasparente) e π (costituito da una tavola in legno) incidenti lungo la retta u. Su π' è disegnata una circonferenza inscritta in un quadrato, il cui bordo è collegato tramite fili tesi (che modellizzano i raggi solari) al bordo di un'ellisse inscritto in un rettangolo, disegnati su π (vedi Figura A.14).

Funzionamento della macchina: La macchina realizza una corrispondenza biunivoca tra i punti delle figure di π' e quelli delle figure distorte disegnate su π, in modo che queste ultime possano considerarsi come ombre solari di quelle giacenti su π'. I raggi solari sono materializzati nel modello tramite fili tesi tra loro paralleli. Il modello permette di ruotare il piano π' intorno alla retta u: in questo modo si può osservare che durante la rotazione i fili tesi rimangono paralleli tra loro e che quando π' si sovrappone a π tali fili sono perpendicolari alla retta u. In particolare, se π' e π sono sovrapposti, la trasformazione tra le figure diventa uno stiramento, ossia una trasformazione che mantiene inalterate le distanze lungo una direzione e le modifica lungo quella opposta (vedi Figura A.14).

Appendice

Appendice B

Trasformazioni lineari

In questa appendice sono riportate le definizioni e le osservazioni principali inerenti alle trasformazioni lineari, sia da un punto di vista sintetico, sia analitico, essenziali per la comprensione del funzionamento e della costruzione dei pantografi e della genesi tridimensionale dello stiramento (presentati e descritti nel Capitolo 2).

Definizione B.1. Una trasformazione geometrica T tra i punti di un piano è una corrispondenza biunivoca che ad ogni punto P del piano associa uno e un solo punto P' appartenente al piano stesso e viceversa.
Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, le coordinate del punto $P' = (x', y')$ possono essere espresse in funzione delle coordinate del punto $P = (x, y)$:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \tag{B.1}$$

Con f e g funzioni continue.
Queste equazioni rappresentano l'espressione analitica della trasformazione e forniscono le coordinate del punto trasformato P' quando sono assegnate le coordinate del punto P .

Definizione B.2. Un punto si dice unito rispetto alla trasformazione T se la sua immagine P' coincide con P.

Definizione B.3. Un'affinità (o trasformazione affine) è una trasformazione geometrica che manda rette in rette e ne conserva il parallelismo.
Fissato un sistema di riferimento cartesiano Oxy, un'affinità fra due piani π e π' è un'applicazione biettiva T che fa corrispondere al punto $P = (x, y)$ appartenente a π, il punto $P' = (x', y')$ appartenente a π' secondo la formula:

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases} \tag{B.2}$$

dove i coefficienti a, b, c, d, e, f sono numeri reali. L'applicazione continua T è biettiva se $ad - bc \neq 0$.
Di seguito ci sarà molto utile riferirci alla matrice dei coefficienti del Sistema (B.2), $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Definizione B.4. Una similitudine è una trasformazione geometrica affine in cui resta invariato il rapporto fra le distanze di coppie di punti corrispondenti A, B e A', B' ovvero: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = k$.

Dal punto di vista analitico, una similitudine è un tipo particolare di affinità in cui risulti: $a = d$ e $c = -b$, oppure $a = -d$ e $c = b$ (coefficienti diagonali opposti). Perciò una similitudine può essere rappresentata in due soli modi in unsistema di riferimento cartesiano Oxy fissato:

- similitudini dirette
$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = -bx + ay + f. \end{cases}$$
In particolare si osserva che, se A è la matrice dei coefficienti del sistema (B.2), allora si ha una similitudine diretta $\Leftrightarrow detA > 0$.

- similitudini inverse
$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = bx - ay + f. \end{cases}$$
In questo caso, invece, se A è la matrice dei coefficienti del sistema (B.2), allora si ha una similitudine diretta $\Leftrightarrow detA < 0$.

Il numero k positivo e definito da $k = \sqrt{a^2 + b2}$ si dice rapporto di similitudine.

Definizione B.5. Si dice isometria una trasformazione geometrica affine che conserva le distanze. Dati due punti A, B l'isometria fa ad essi corrispondere due punti A' e B' tali che $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Pertanto le figure trasformate conservano la forma e la grandezza e dunque risultano congruenti a quelle date.
Si dimostra che la richiesta di conservare le distanze (e quindi gli angoli) coincide col chiedere che la matrice A sia ortogonale, ovvero che $detA = \pm 1$. Se risulta $detA = 1$ l'isometria è detta diretta, o pari, se $detA = -1$ è detta indiretta, dispari. Nel primo caso una figura F può essere trasportata sulla figura trasformata F' con un movimento rigido, nell'altro è una sua immagine speculare.
Sono isometrie le traslazioni, rotazioni e simmetrie (centrali ed assiali).

Definizione B.6. Traslazione di vettore $\overrightarrow{v} = (x_0, y_0)$ è una trasformazione che ad ogni punto P del piano associa un punto P' tale che il vettore $\overrightarrow{PP'}$ è uguale al vettore $\overrightarrow{v}$.
L'espressione analitica della traslazione è data da:

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = x + y_0. \end{cases} \tag{B.3}$$

La matrice associata alla trasformazione (cioè la matrice dei coefficienti del sistema (B.3)) è la matrice identità.

Definizione B.7. La rotazione di centro C e angolo orientato α è la trasformazione che ad ogni punto P del piano associa un punto P' tale che $\overline{PC} = \overline{P'C}$ e l'angolo $P\hat{C}P' = \alpha$.
Fissato un sistema cartesiano Oxy, le equazioni analitiche di una rotazione di centro $O = (0,0)$ e angolo α orientato in senso antiorario sono:

$$\begin{cases} x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha \\ y' = x \sin\alpha - y \cos\alpha \end{cases} \tag{B.4}$$

Definizione B.8. La simmetria centrale di centro C è una trasformazione che ad ogni punto P del piano associa un punto P' tale che C è il punto medio del segmento $\overline{PP'}$.
Fissato un sistema di riferimento cartesiano O, xy e considerando la proprietà delle coordinate del punto medio, possiamo dedurre dalla definizione le equazioni della trasformazione:

$$\begin{cases} x' = 2x_c - x \\ y' = 2y_c - y. \end{cases} \tag{B.5}$$

Definizione B.9. La simmetria assiale di asse $ax + by + c = 0$ è una trasformazione che ad ogni punto P del piano associa un punto P' tale che il segmento $\overline{PP'}$ è perpendicolare all'asse e il punto medio M di $\overline{PP'}$ appartiene all'asse.
Ad esempio, in un sistema di riferimento cartesiano Oxy, la simmetria rispetto all'asse delle ascisse $y = 0$ è:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y. \end{cases}$$

Definizione B.10. Dato un punto O nel piano ed un numero reale $k \neq 0$, la trasformazione T che ad ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P', allineato con O e P , tale che sia $\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}$ è detta omotetia di centro O e rapporto k.
O si dice centro di omotetia. La costante k è detta rapporto di omotetia.

Se il centro dell'omotetia O coincide con l'origine degli assi, le equazioni analitiche della trasformazione sono

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky. \end{cases} \tag{B.6}$$

Se il centro $C = (a, b)$ dell'omotetia non coincide con l'origine degli assi, le equazioni analitiche diventano

$$\begin{cases} x' = kx + a(1 - k) \\ y' = ky + b(1 - k). \end{cases} \tag{B.7}$$

Inoltre vanno distinti i seguenti casi particolari:

- se $k > 0$ l'omotetia si dice diretta. P e P' si trovano dalla stessa parte di O;
- se $k < 0$ l'omotetia si dice inversa. P e P' si trovano da parti opposte rispetto ad O;
- se $k = 1$ si ha l'identità;
- se $k = -1$ si ha la simmetria rispetto all'origine.

Definizione B.11. Si definisce omologia affine (piana) ogni trasformazione biunivoca e continua del piano in sé che ha uniti tutti e soli i punti di una retta, detta asse della omologia affine, e tale che: i punti corrispondenti distinti siano sempre congiunti da rette parallele fra loro (dette raggi, si veda Sezione 2.1.1) e le rette corrispondenti distinte siano sempre incidenti sull'asse (o parallele all'asse).
Vale l'importante relazione per cui se P, P' sono punti distinti e corrispondenti in una omologia affine, e se H è il punto di intersezione dell'asse della omologia affine con la retta passante per P e P', allora il rapporto $\frac{P'H}{PH}$ è costante.
L'omologia affine può essere:

- stiramento (o ortogonale), se la direzione comune ai raggi è ortogonale alla direzione dell'asse;
- speciale, se la direzione comune ai raggi coincide o è equivalente alla direzione dell'asse.

Fissato un sistema di riferimento cartesiano Oxy, le equazioni di uno stiramento rispetto all'asse delle ascisse $y = 0$ e di rapporto k sono:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = y. \end{cases} \tag{B.8}$$

Bibliografia

[1] Elaine S Andersen, Anne Dunlea, Linda S Kekelis. Blind children's language: Resolving some differences. *Journal of Child language*, 11(3):645–664, 1984.

[2] Tiziana Armano, Anna Capietto, Nadir Murru. Una panoramica sull'utilizzo delle nuove tecnologie per l'accesso a testi scientifici da parte di persone con disabilità visiva. In *DI. FI. MA. 2015-Insegnare e imparare matematica e fisica: insegnanti e studenti per una didattica inclusiva*, volume 1. Ledizioni, 2017.

[3] Chiara Bonfigliuoli, Marina Pinelli. *Disabilità visiva: teoria e pratica nell'educazione per alunni non vedenti e ipovedenti.* Edizioni Erickson, 2010.

[4] Jerome Bruner. Early social interaction and language development. *Studies in mother-child interaction*, pages 271–289, 1977.

[5] Maria G Bartolini Bussi, Michela Maschietto. *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola.* Springer Science & Business Media, 2007.

[6] Roberta Caldin. *Percorsi educativi nella disabilità visiva: identità, famiglia e integrazione scolastica e sociale.* Edizioni Erickson, 2006.

[7] Andrea Canevaro, Luigi d'Alonzo, Dario Ianes. *L'integrazione scolastica di alunni con disalibità dal 1977 al 2007: Risultati di una ricerca attraverso lo sguardo delle persone con disabilità e delle loro famiglie.* University Press Bozen, 2009.

[8] Emma Castelnuovo, Ferdinando Arzarello, Maria Giuseppina Bartolini. *Didattica della matematica.* La Nuova Italia Firenze, 1963.

[9] Emma Castelnuovo, Claudio Gori Giorgi, Valenti Daniela. *Matematica oggi 2.* La Nuova Italia, 1992.

[10] Gina Conti-Ramsden. Maternal recasts and other contingent replies to language-impaired children. *Journal of Speech and Hearing Disorders*, 55:262–274, 1990.

[11] Anna Rita Damascelli. *Problematiche nell'apprendimento del linguaggio nel bambino non vedente.* Vedere con la mente, 1992.

[12] José Enrique Fernândez del Campo. *L'insegnamento della matematica ai ciechi.* Biblioteca italiana per i ciechi Regina Margherita, 2000.

[13] Gianmario Dell'Osbel. La condizione dei non vedenti: aspetti medico-epidemiologici e socio-assitenziali. In *D. Galati, Vedere con la mente. Conoscenza, affettività, adattamento dei non vedenti. Milano: Franco Angeli.*, 1992.

[14] Anne Dunlea. *Vision and the emergence of meaning: Blind and sighted children's early language.* Cambridge University Press, 1989.

[15] Angelo Fiocco. Cecità e ipovisione: differenze e affinità. In *R. Caldin (a cura di), Percorsi educativi nella disabilità visiva, Trento, Erickson*, 2006.

[16] Francesco Guzzetta, Paolo Mariotti, Laura Iuvone. Il linguaggio del non vedente. *Problemi di sviluppo e riabilitazione*, 1998.

[17] Maria Alessandra Mariotti. Strumenti antichi e moderni nell'educazione matematica. In *Ricordando Franco Conti, Scuola Normale Superiore, Pisa*, 2004.

[18] Megan O'Connell, Lauren J Lieberman, Susan Petersen. The use of tactile modeling and physical guidance as instructional strategies in physical activity for children who are blind. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 100(8):471–477, 2006.

[19] Miguel Pérez-Pereira. Imitations, repetitions, routines, and the child's analysis of language: insights from the blind. *Journal of Child Language*, 21(2):317–337, 1994.

[20] Jean Piaget, Alberto Marzi, Édouard Claparède, Carla Musatti Rapuzzi. *Il linguaggio e il pensiero del fanciullo*. Universitaria-G. Barbera, 1965.

[21] Brunetto Piochi, Manuela Baldeschi. Sussidi didattici per l'introduzione della prospettiva e della geometria proiettiva con alunni non vedenti. In *Alunni, insegnanti, matematica. Progettare, animare, integrare. Conference Proceedings*, number 14, 2005.

[22] Antonio Quatraro, Eliseo Ventura, Guido Pesci, Augusto Ventura. *Il Braille: un altro modo di leggere e di scrivere*. Bulzoni, 1990.

[23] Luis Radford. Body, tool, and symbol: Semiotic reflections on cognition. *Canadian Mathematics Education Study Group Groupe Canadien D'étude En Didactique Des Mathématiques*, page 111, 2004.

[24] Alessia Raggi. Macchine matematiche dalla storia alla scuola. percorso in una secondaria di secondo grado. Master's thesis, Alma Mater Studiorum Università di Bologna, Italia, 2019.

[25] Cathy Urwin. Language for absent things: learning from visually handicapped children. *Topics in Language Disorders*, 9:24–37, 1984.

[26] Renzo Vianello, Gianluca Gini, Silvia Lanfranchi. *Psicologia dello sviluppo*. UTET università, 2015.

[27] Lev Semenovich Vygotsky. *The collected works of LS Vygotsky: the fundamentals of defectology*, volume 2. Springer Science & Business Media, 1987.

[28] Paola Zaniboni. *Il bambino non vedente: finalità e metodi della scuola dell'obbligo*. Biblioteca Italiana per i Ciechi, 1998.